1 Exercices

Exercice 1.1 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \\ -5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

2. Déterminer toutes les matrices M telles que $AM = MA$
3. Calculer A^n

Exercice 1.2 On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 2 & 3 & & n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

1. Calculer $\det A_n$.
2. Calculer $(A_n)^{-1}$.

Exercice 1.3 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 1 & 14 & 13 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

2. Déterminer toutes les matrices X telles que $X^3 = A$
3. Existe-t-il une matrice réelle X telle que $X^2 = A$?

Exercice 1.4 On considère $D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^{n-2} & (a_1)^n \\ 1 & a_2 & (a_2)^2 & \cdots & (a_2)^{n-2} & (a_2)^n \\ \vdots & a_3 & (a_3)^2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & (a_{n-1})^{n-2} & (a_{n-1})^n \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & & (a_n)^{n-2} & (a_n)^n \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout polynôme P unitaire de degré n et sans terme de degré $n-1$, on a
$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & (a_1)^2 & \cdots & (a_1)^{n-2} & P(a_1) \\ 1 & a_2 & (a_2)^2 & \cdots & (a_2)^{n-2} & P(a_2) \\ \vdots & a_3 & (a_3)^2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & (a_{n-1})^{n-2} & P(a_{n-1}) \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \cdots & (a_n)^{n-2} & P(a_n) \end{pmatrix}$$
2. En choisissant convenablement P, en déduire l'expression de D_n.

Exercice 1.5 1. Etude de la réduction de $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -9 & 3 & -7 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Chercher des solutions simples de l'équation $X^2 = A$
3. Est-il possible de donner toutes les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 1.6 Calculer $\det \left(\dfrac{1}{a_i + a_j} \right)_n$

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)