# Trigonométrie circulaire et hyperbolique

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

## 1 Trigonométrie circulaire et hyperbolique

### 1.1 Fonctions circulaires directes

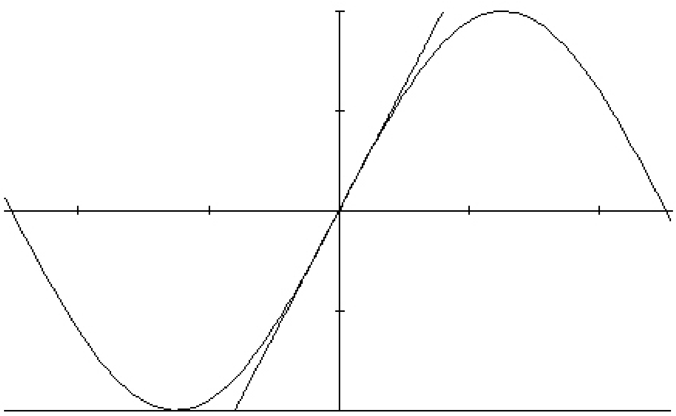
La définition géométrique des fonctions sinus et cosinus est la suivante. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. Pour un réel $\theta$, on note $M_\theta$ le point du cercle de centre $O$ et de rayon 1 tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_\theta}})$ soit égale à $\theta$. On note alors $\cos\theta$ et $\sin\theta$ les coordonnées de $M_\theta$ dans $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. Les fonctions obtenues sont appelées fonction cosinus et fonction sinus. Elles possèdent les propriétés suivantes (géométriquement évidentes) :

1. sin et cos sont $2\pi$-périodiques (et $2\pi$ est la plus petite préiode possible), à valeurs dans $[-1, 1]$ et on a les valeurs particulières (pour $k \in \mathbb{Z}$) :
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k, \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0, \sin(k\pi) = 0, \cos(k\pi) = (-1)^k$$
2. quelques autres valeurs pour des angles particuliers :

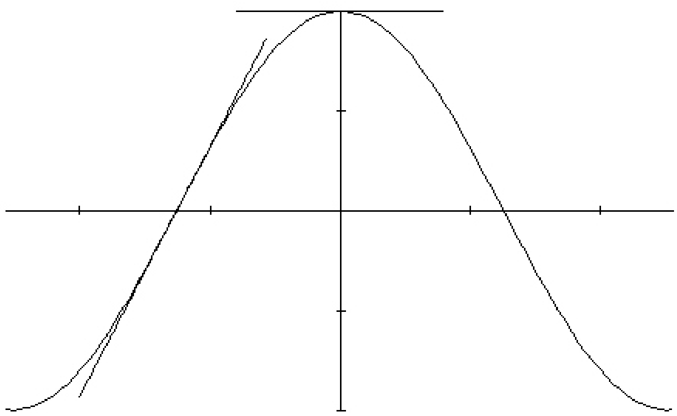
| | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cos | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |

3. sin est impaire, tandis que cos est paire;
4. On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$;
5. Les formules suivantes s'interprètent géométriquement :
$$\begin{array}{ll} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 & \\ \cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi, & \cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi \\ \sin(\theta - \phi) = \sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta, & \sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta \end{array}$$
La première formule résulte du théorème de Pythagore. La deuxième s'obtient en constatant que le produit scalaire de $\overrightarrow{OM_\theta}$ et $\overrightarrow{OM(\phi)}$ est égal à $\cos(\theta - \phi)$ et les autres formules s'en déduisent.

Nous admettrons également (ça n'est pas évident) que sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$. On en déduit les tableaux de variations ainsi que les représentations graphiques de ces fonctions (l'étude est faite sur $[-\pi, \pi]$ car ces deux fonctions sont $2\pi$-périodiques, il aurait cependant été possible de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$ en utilisant des considérations de parité).



représentation graphique de sin sur $[-\pi, \pi]$



représentation graphique de cos sur $[-\pi, \pi]$.

**Exercice 1**
En utilisant un taux d'accroissement, déterminer la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers 0.

**Solution 1**
On écrit simplement : $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ et le membre de droite tend vers $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ lorsque $x \to 0$.

**Exercice 2**
Faire de même avec $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ (toujours lorsque $x$ tend vers 0).

**Solution 2**
On écrit simplement : $\dfrac{\cos x - 1}{x} = \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ et le membre de droite tend vers $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ lorsque $x \to 0$.

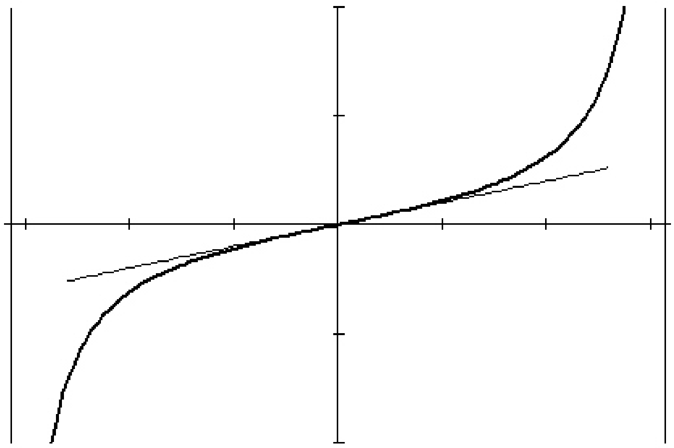
Nous passons maintenant à la fonction tangente, définie pour $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ par $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Le tableau suivant donne les valeurs de la fonction tangente en des points particuliers :

| | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|
| tan | 0 | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

Cette fonction est $\pi$-périodique, continue et dérivable sur son domaine de définition et on a, $\theta \in \mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ :

$$\tan'\theta = \frac{\sin'\theta\cos\theta - \sin\theta\cos'\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$

On en déduit les variations et la représentation de la fonction tan (l'étude étant faite sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$).



## 1.2 Fonctions circulaires réciproques

Les variations des fonctions sin, cos et tan montrent que :

- sin réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$;
- cos réalise une bijection strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$;
- tan réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Nous allons ici nous intéresser aux réciproques de ces bijections.

**Définition 1**
*On appelle fonction arc sinus, et on note* arcsin, *la réciproque de la restriction de* sin *à* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. *On appelle fonction arc cosinus, et on note* arccos, *la réciproque de la restriction de* cos *à* $[0, \pi]$. *On appelle fonction arc tangente, et on note* arctan, *la réciproque de la restriction de* tan *à* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

**Exercice 3**
Calculer $\arcsin x$ et $\arccos x$ pour les valeurs suivantes de $x$ : $-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1$

**Solution 3**

| $x$ | $-1$ | $-\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-1/2$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin x$ | $-\pi/2$ | $-\pi/3$ | $-\pi/4$ | $-\pi/6$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
| $\arccos x$ | $\pi$ | $5\pi/6$ | $3\pi/4$ | $2\pi/3$ | $\pi/2$ | $\pi/3$ | $\pi/4$ | $\pi/6$ | $0$ |

**Exercice 4**
Simplifier, pour $x \in [-1,1]$ : $\arccos(x) + \arccos(-x)$, $\quad \arcsin(x) + \arcsin(-x)$.

**Solution 4**
Comme $\theta = \arccos x \in [0,\pi]$, on a $\pi - \theta \in [0,\pi]$ et $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = -x$. Par conséquent, $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$, autrement dit $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$. La fonction arcsin étant clairement paire, on a $\arcsin(x) + \arcsin(-x) = 0$.

**Exercice 5**
Calculer $\arctan x$ pour les valeurs suivantes de $x$ : $-\sqrt{3}, -1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}$

**Solution 5**

| $x$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-1/\sqrt{3}$ | $0$ | $1/\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\arctan x$ | $-\pi/3$ | $-\pi/4$ | $-\pi/6$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |

**Proposition 1**
arcsin *est une bijection continue strictement croissante de* $[-1,1]$ *sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *et* arccos *est une bijection continue et strictement décroissante de* $[-1,1]$ *sur* $[0,\pi]$. *Pour* $x \in [-1,1]$, $\arcsin x$ *(respectivement* $\arccos x$*) est l'unique réel* $\theta$ *élément de* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *(respectivement* $[0,\pi]$*) tel que* $\sin\theta = x$ *(respectivement* $\cos\theta = x$*).*

**Proposition 2**
*On a les résultats suivants :*

1. *Quel que soit* $x \in [-1,1]$ : $\sin(\arcsin x) = x$, $\quad \cos(\arccos x) = x$.
2. *Quel que soit* $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin\theta) = \theta$;
3. *Quel que soit* $\theta \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos\theta) = \theta$.

**Remarque 1 (Z)**
On prendra garde au fait que, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on n'a en général pas $\arcsin(\sin\theta) = \theta$, ni $\arccos(\cos\theta) = \theta$.

**Exercice 6**
Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$, $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)$.

**Solution 6**
$\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4} \quad \arccos\left(\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{4\pi}{5}$

**Proposition 3**
*Pour* $x \in [-1,1]$, *on a* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *et* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

**Preuve :**
Considérons $\theta = \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On a $\cos\theta \geqslant 0$, donc :

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1-x^2}$$

et on procède de même pour obtenir la seconde relation. ∎

**Proposition 4**
arcsin *et* arccos *sont dérivables sur* $]-1,1[$ *et, pour* $x \in ]-1,1[$, *on a :* $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad \arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

**Preuve :**
Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, sin est dérivable et sa dérivée en $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est donnée par $\sin'\theta = \cos\theta > 0$. Cette dérivée ne s'annule donc pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Appliquant le théorème sur la dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et que sa dérivée en $x \in ]-1,1[$ est donnée par :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On procède de même pour obtenir la dérivée de arccos. ∎

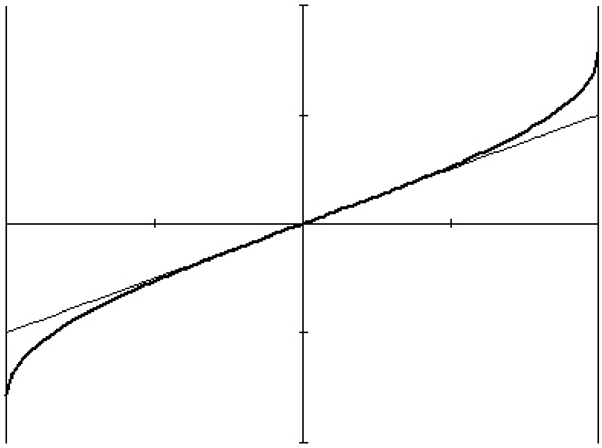
**Remarque 2**
arcsin et arccos ne sont pas dérivables en $-1$ ni en 1. De la proposition précédente, on déduit que arcsin + arccos est constante sur $]-1,1[$ (puisque sa dérivée est nulle sur cet intervalle) et on a donc, pour $x \in ]-1,1[$ :

$$\arcsin x + \arccos x = \arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

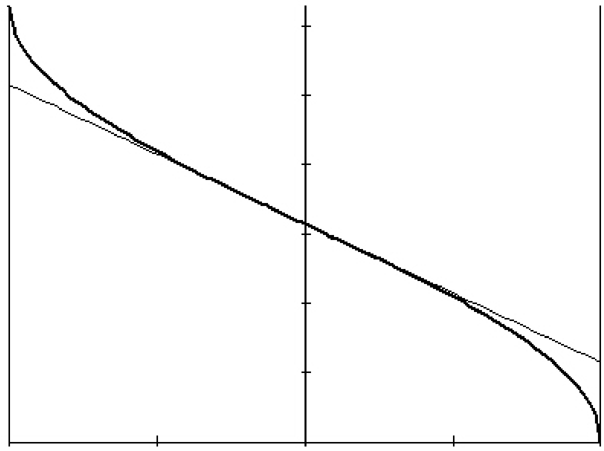
cette égalité restant visiblement valable en $-1$ et en 1.

**Exercice 7**
Un calcul de dérivée de fonction composée avec arcsin, arccos.

**Remarque 3**
On notera que les courbes représentatives des fonctions arcsin et arccos présentent des tangentes verticles aux points d'abscisses $-1$ et 1.



Représentation de arcsin



Représentation de arccos

**Exercice 8**
Calculer $\sin\left(2\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ et $\cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)+\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

**Solution 7**
On trouve $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ et $\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$.

**Proposition 5**
arctan *est une bijection continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. *Pour* $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ *est l'unique réel* $\theta$ *élément de* $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\tan\theta = x$.

**Proposition 6**
*On a les résultats suivants :*

1. *Quel que soit* $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$;
2. *Quel que soit* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan\theta) = \theta$.

**Remarque 4 (Z)**
Là encore, on prendra garde au fait que, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on n'a en général pas $\arctan(\tan\theta) = \theta$.

**Proposition 7**
*Pour* $x \in \mathbb{R}$, *on a :* $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

**Preuve :**
On pose $\theta = \arctan x$. On a $\cos\theta \geqslant 0$, donc : $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan(\arctan x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
On a ensuite : $\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x)\cos(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ■

**Proposition 8**
arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée en* $x \in \mathbb{R}$ *est donnée par :* $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

**Preuve :**
Sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tan est dérivable et sa dérivée en $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est donnée par :

$$\tan' \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

En appliquant le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée en $x \in \mathbb{R}$ est donnée par : $\arctan' x = \dfrac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$ ■

**Remarque 5**
Posons :

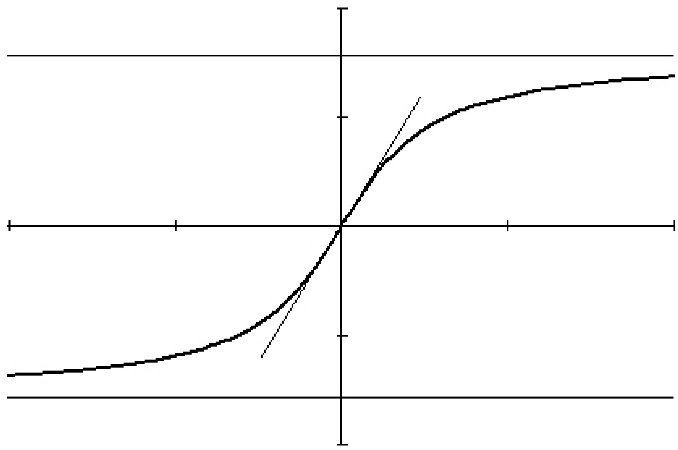
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^\times & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et sa dérivée en $x \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$f'(x) = \arctan' x - \frac{1}{x^2} \arctan' \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

On en déduit que $f$ est constante sur $\mathbb{R}_-^\times$ et $\mathbb{R}_+^\times$. On a donc :

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } x > 0$$
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } x < 0$$



Représentation de arctan

**Remarque 6**
L'intérêt des fonctions trigonométriques réciproques réside surtout dans le calcul de primitives. La fonction arctan par exemple intervient dans le calcul de primitives de fractions rationnelles (quotients de deux fonctions polynômes).

## 1.3 Quelques exercices sur la fonction arctan

**Exercice 9 (*)**
On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x\pm 2}$

1. Cas où le coefficient constant est $-2$ : montrer que le dénominateur possède deux racines distinctes $x_1$ et $x_2$ et qu'il existe des coefficients $a$ et $b$ tels que : $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{a}{x-x_1} + \dfrac{b}{x-x_1}$. En déduire une primitive de $f$.

2. Cas où le coefficient constant est 2 : montrer que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe des coefficients $a$, $b$ et $c$ tels que la fonction $F$ définie par :$F(x) = a\arctan(bx+c)$ soit une primitive de $f$.

**Solution 8**

1.

2. Il suffit donc que l'on ait $b = a$, $a = 2c$ et $1 + c^2 = 2ab$. On en déduit que $b = a = 2c$ et $1 + c^2 = 8c^2$. On prend donc $c = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$, $b = b = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$. La fonction $F$ définie par : $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \arctan\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$ est donc une primitive de $f$.

**Exercice 10 (*)**

1. Soit $\theta \in ]-\pi, \pi[$. Montrer que : $\theta = 2\arctan \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$
2. En déduire que pour un nombre complexe $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, $z \notin \mathbb{R}^-$, l'angle $\theta$ défini par :

$$\theta = 2\arctan \frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}$$

est l'unique argument de $z$ dans $]-\pi, \pi[$.

**Solution 9**

1. On a :

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

par conséquent :

$$\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} \quad \left(\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

2. Comme $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on a : $\theta = 2\arctan \dfrac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = 2\arctan\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$

# 2 Fonctions hyperboliques

## 2.1 Fonctions hyperboliques directes

**Définition 2**

*On appelle fonctions sinus et cosinus hyperboliques, et on note respectivement* sh *et* ch, *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

*La fonction tangente hyperbolique, notée  est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par :*

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

*(ce qui est légitime puisque* $\operatorname{ch} x > 0$*).*

Noter l'analogie avec les fonctions sinus et cosinus. On pourrait être tenté d'écrire :

$$i\sin\theta = \operatorname{sh}(i\theta), \quad \cos\theta = \operatorname{ch}(i\theta)$$

mais nous n'approfondirons pas ce point ici (on pourra néanmoins retenir ces formules et les utiliser comme moyen mnémotechnique pour obtenir le formulaire de trigonométrie hyperbolique à partir de formulaire de trigonométrie circulaire). On ne détaillera pas le formulaire de trigonométrie hyperbolique ici, mentionnons simplement l'identité :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = -1$$

Géométriquement, sh et ch permettent de paramétrer la partie droite de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

**Exercice 11**

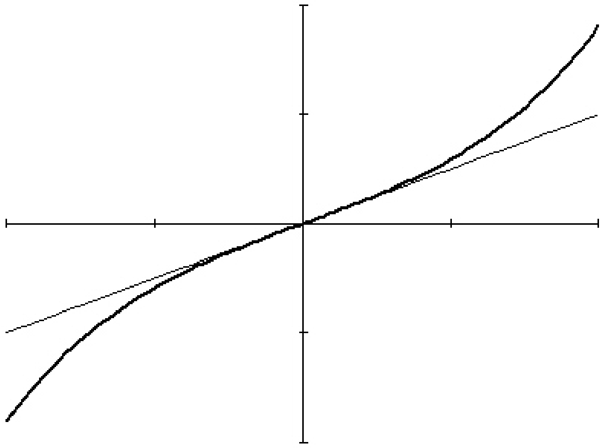
Calculer $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$. Montrer la formule suivante (analogue de la formule de Moivre) :

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$$

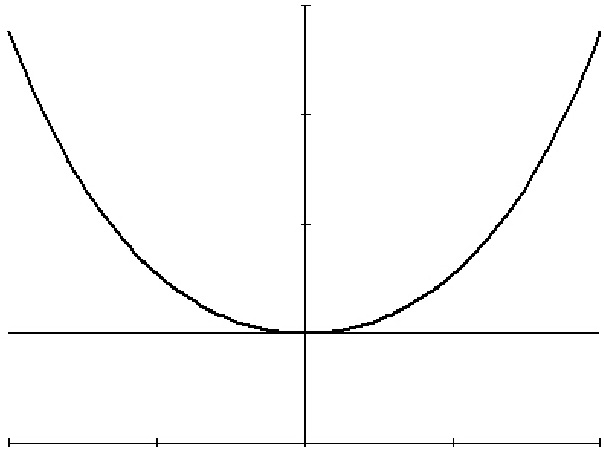
**Solution 10**

On a $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$. Ensuite il suffit d'écrire : $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx)$

**Proposition 9**
*La fonction* sh *est impaire, tandis que la fonction* ch *est paire. Toutes deux sont dérivables (et donc continues) sur* $\mathbb{R}$ *et leurs dérivées en* $x \in \mathbb{R}$ *sont donnée par* $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ *et* $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$.



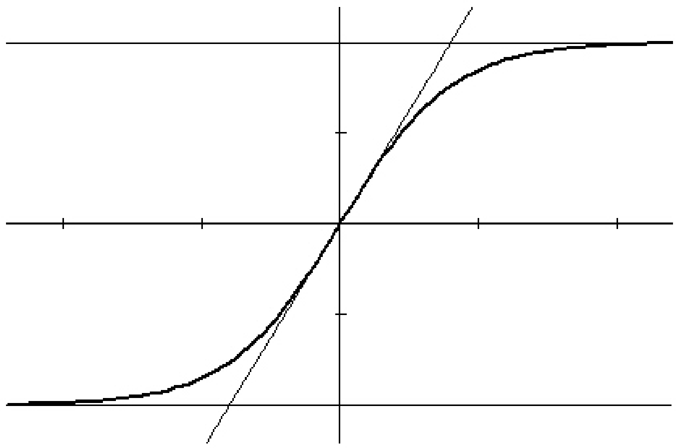
Réprésentation de sh



Réprésentation de ch

**Exercice 12**
Tracer sur un même dessin les courbes représentatives des fonctions sh, ch et $x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{2}$.

**Proposition 10**
*La fonction* th *est impaire, dérivable (donc continue) sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée en* $x \in \mathbb{R}$ *est donnée par* $\operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$.



Représentation de th

## 2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

**Définition 3**
*La fonction sinus hyperbolique réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$. *On appelle argument sinus hyperbolique, et on note* argsh, *sa réciproque. De même, la fonction cosinus hyperbolique induit une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *sur* $[1, +\infty[$. *On appelle argument cosinus hyperbolique, et on note* argch, *la réciproque de sa restriction à* $\mathbb{R}^+$. *La fonction tangente hyperbolique réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]-1, 1[$. *On appelle argument tangente hyperbolique, et on note* argth, *sa réciproque.*

**Exercice 13**
Soit $A \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre les équations $\operatorname{ch} x = A$ et $\operatorname{sh} x = A$ (on posera $X = e^x$).

**Solution 11**
La première équation ne possède de solution que si $A \geqslant 1$. Dans ce cas, les solutions sont $\ln(A - \sqrt{A^2 - 1})$ et $\ln(A + \sqrt{A^2 - 1})$. Ces solutions sont opposées, distinctes si et seulement si $A \neq 1$. La seconde équation possède une unique solution quel que soit $A$, qui s'écrit $\ln(A + \sqrt{A^2 + 1})$. On eput donc écrire :

$$\operatorname{argch} A = \ln(A + \sqrt{A^2 - 1}) \quad \operatorname{argsh} A = \ln(A + \sqrt{A^2 + 1})$$

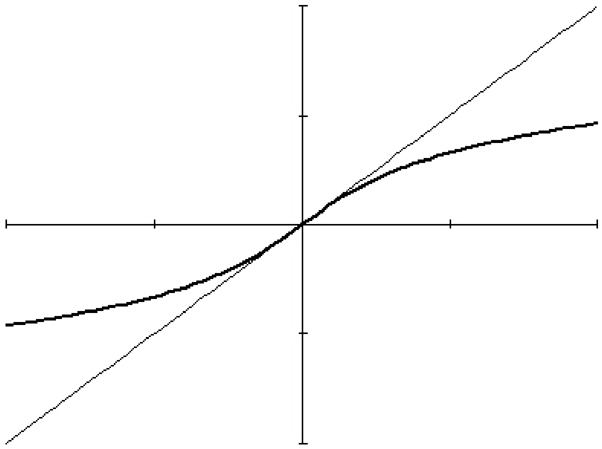
**Proposition 11**
argsh *et* argch *sont des fonctions strictement croissantes.* argsh *est de plus impaire. On a, pour* $x \in \mathbb{R}$

$$: \begin{array}{ll} \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x & \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x \\ \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = |x| & \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x \ (si\ x \geqslant 1) \\ \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2} & \operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1} \ (si\ x \geqslant 1) \end{array}$$

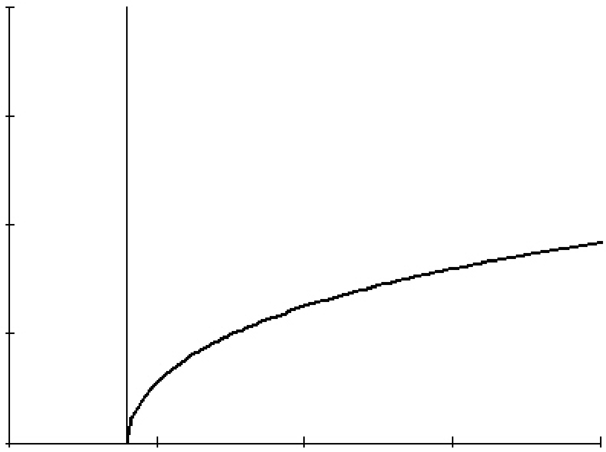
**Proposition 12**
*La fonction* argsh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée en* $x \in \mathbb{R}$ *est donnée par :* $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

*La fonction* ch *n'est dérivable que sur* $]1, +\infty[$ *et sa dérivée en* $x > 1$ *est donnée par :* $\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

**Preuve :**
On applique une fois de plus le théorème sur la dérivation des fonctions réciproques, en tenant compte du fait que la dérivée de ch s'annule en 0. Par contre la dérivée de sh ne s'annule pas. ■



Représentation de arg sh



Représentation de arg ch

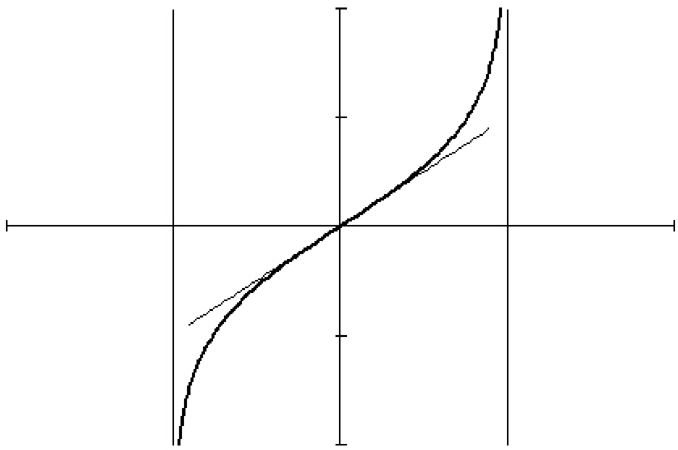
**Remarque 7**
Noter la tangente verticale à la courbe représentative de argch au point d'abscisse 1.

**Exercice 14**
Un exercice de calcul de dérivée de fonction composée avec argch et argsh.

**Proposition 13**
argth *est une fonction strictement croissante et impaire. On a, pour* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x \quad \operatorname{th}(\operatorname{argth} x) = x \ (si\ x \in ]-1, 1[)$$

**Proposition 14**
argth *est dérivable sur* $]-1, 1[$ *et sa dérivée en* $x \in ]-1, 1[$ *est donnée par :* $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$



Représentation de argth