Coniques

Abdellah Bechata

www.mathematiques.fr.st

Nous allons étudier dans cette leçon une famille de courbes particulière : les coniques. Ces courbes remarquables peuvent être définies de plusieurs manière différentes : géométriquement, analytiquement (en coordonnées cartésiennes ou polaires) ou encore mécaniquement. Elles possèdent de plus des propriétés remarquables dont nous donnerons des exemples. On se place, dans cette leçon, dans un plan orienté $\mathcal{P}$.

1 Définition monofocale des coniques

1.1 Définition géométrique

Définition 1 (Conique)
Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif. On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e l'ensemble de points du plan :

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \quad / \quad \frac{MF}{d(M,\mathcal{D})} = e \right\}$$

(rappelons que la distance de M à $\mathcal{D}$, notée $d(M.\mathcal{D})$, est égale à la distance MH si H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$). La droite passant par F et orthogonale à $\mathcal{D}$ est appelée axe focal de la conique et le réel $p = eh$, où h est la distance de F à $\mathcal{D}$, est appelé paramètre de $\mathcal{C}$. Lorsque $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse, si $e = 1$ on dit que c'est une parabole et si $e > 1$, on dit que c'est une hyperbole.

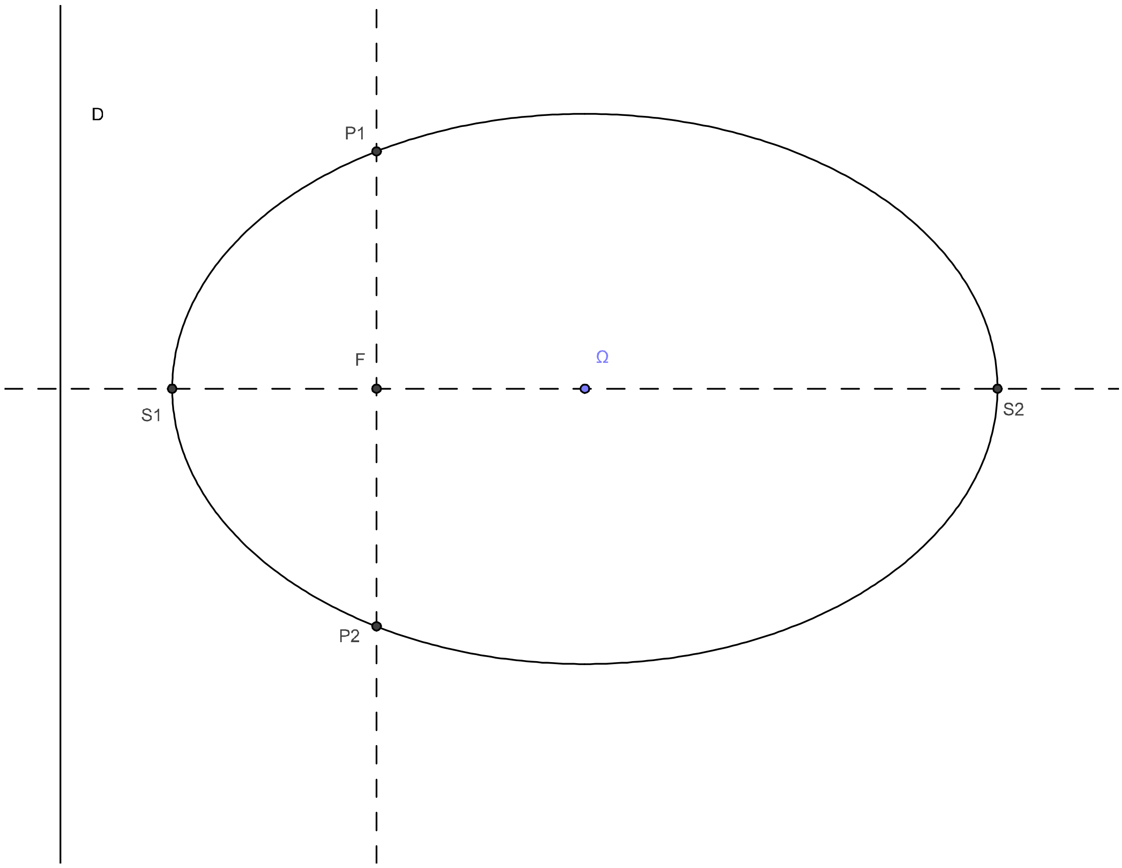
Si $\mathcal{C}$ est une conique de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, on appelle repère focal associé à $\mathcal{C}$ le repère orthonormé direct d'origine F dont l'axe des abscisses est l'axe focal (orienté de $\mathcal{D}$ vers F). Ce repère sera noté $\mathcal{R}_F$. Dans le repère $\mathcal{R}_F$, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -h$ et il est clair que l'axe focal est un axe de symétre de la conique $\mathcal{C}$. Voyons s'il est possible de déterminer quelques points de $\mathcal{C}$. Considérons tout d'abord un point M situé à la verticale de F, alors M appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $MF = ed(M,\mathcal{D})$. Or $d(M,\mathcal{D}) = d(F,\mathcal{D}) = h$, donc $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $MF = p$. On en déduit que les points $P_1 \left| \begin{array}{l} 0 \\ p \end{array} \right.$ et $P_2 \left| \begin{array}{l} 0 \\ -p \end{array} \right.$ appartiennent à $\mathcal{C}$. Considérons maintenant un point M situé sur l'axe focal et cherchons à quelle condition $M \in \mathcal{C}$. On distingue pour cela trois cas :

- si M est à droite de F, on doit avoir $MF = e(MF + h)$, *i.e.* $(1-e)MF = p$. Ce cas n'est possible que si $e < 1$ (en effet, on doit non seulement avoir $e \neq 1$, mais aussi $1 - e \geqslant 0$ puisque $MF \geqslant 0$) et on a alors $MF = \dfrac{p}{(1-e)}$;
- si M est entre $\mathcal{D}$ et F, on doit avoir $MF = e(h - MF)$, *i.e.* $(1+e)MF = p$ et il suffit donc d'avoir $MF = \dfrac{p}{(1+e)}$;
- si M est à gauche de $\mathcal{D}$, on doit avoir $MF = e(MF - h)$, *i.e.* $(e-1)MF = p$. Ce cas n'est possible que si $e > 1$ (en effet, on doit non seulement avoir $e \neq 1$, mais aussi $e - 1 \geqslant 0$ puisque $MF \geqslant 0$) et on a alors $MF = \dfrac{p}{(e-1)}$.

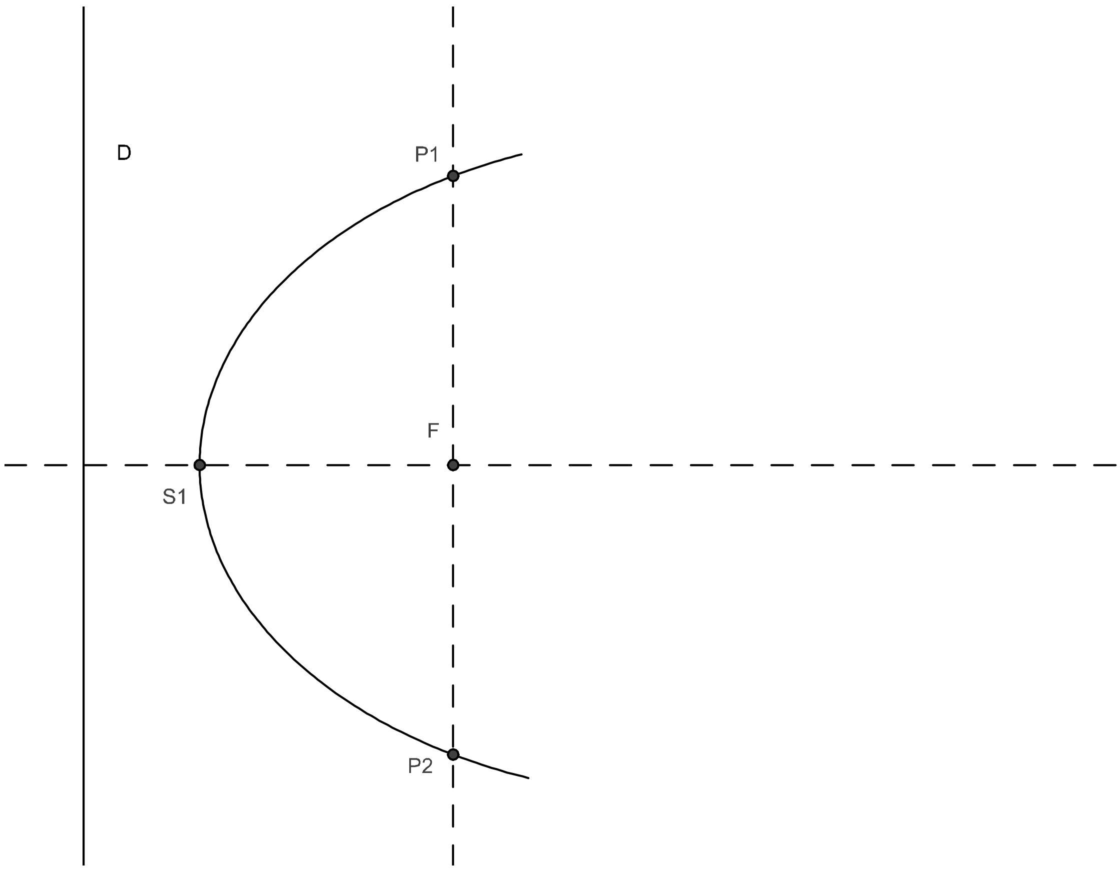
Appelons sommet de la conique $\mathcal{C}$ tout point de $\mathcal{C}$ situé sur l'axe focal, on a donc les résultats suivants :

- si $\mathcal{C}$ est une ellipse, elle possède deux sommets $S_1 \left| \begin{array}{l} -\dfrac{p}{1+e} \\ 0 \end{array} \right.$ et $S_2 \left| \begin{array}{l} \dfrac{p}{1-e} \\ 0 \end{array} \right.$;
- si $\mathcal{C}$ est une parabole, elle possède un unique sommet $S \left| \begin{array}{l} -\dfrac{p}{1+e} \\ 0 \end{array} \right.$;
- si $\mathcal{C}$ est une hyperbole, elle possède deux sommets $S_1 \left| \begin{array}{l} -\dfrac{p}{1+e} \\ 0 \end{array} \right.$ et $S_2 \left| \begin{array}{l} \dfrac{p}{1-e} \\ 0 \end{array} \right.$.

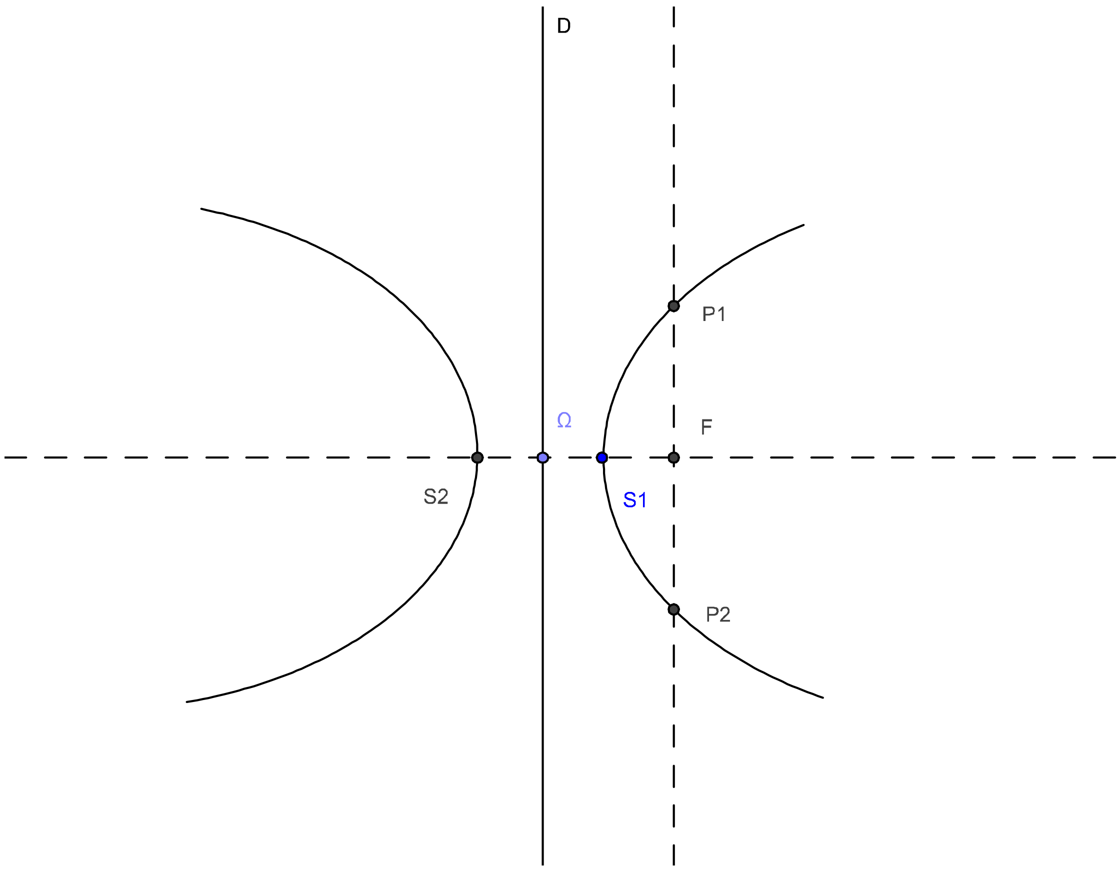
Si $\mathcal{C}$ est une conique possédant deux sommets, on appelle centre de cette conique le point $\Omega \left| \begin{array}{c} \dfrac{pe}{1-e^2} \\ 0 \end{array} \right.$, milieu de S_1 et S_2 et on dit que $\mathcal{C}$ est une conique à centre (nous montrerons plus tard que Ω est alors un centre de symétrie pour la conique).



ellipse



parabole



hyperbole

Exercice 1
Dans un repère orthonormé direct fixé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x-4y=1$, le point $F\left|\begin{array}{c}-1\\0\end{array}\right.$. Pour $M\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right.$, calculer $d(M,\mathcal{D})^2$ et MF^2. En déduire une équation (que l'on ne demande pas de simplifier) de la conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité 2.

Solution 1
On a $d(M,\mathcal{D})^2=\dfrac{(3x-4y-1)^2}{25}$ et $MF^2=(x+1)^2+y^2$, d'où l'équation de la conique :

$$(x+1)^2+y^2=\frac{4}{25}(3x-4y-1)^2$$

1.2 Equations cartésienne et polaire

Proposition 1 (Équations cartésienne et polaire d'une conique dans $\mathcal{R}_F$)
Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e. Dans le repère $\mathcal{R}_F$, $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne :

$$x^2+y^2=(ex+p)^2$$

et pour équation polaire :

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

Preuve :
Soit $M\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right.$ dans le repère $\mathcal{R}_F$. On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, donc $H\left|\begin{array}{c}-h\\y\end{array}\right.$ (toujours dans $\mathcal{R}_F$) et :

$$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow MF=eMH\Leftrightarrow MF^2=eMH^2\Leftrightarrow x^2+y^2=e^2(x+h)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=(ex+eh)^2\Leftrightarrow x^2+y^2=(ex+p)^2$$

Supposons maintenant que M admette (ρ,θ) pour coordonnées polaires dans $\mathcal{R}_F$, le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(-h,\rho\sin\theta)$ et on a alors :

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{C}&\Leftrightarrow MF=eMH\Leftrightarrow|\rho|=|e\rho\cos\theta+p|\Leftrightarrow\rho=e\rho\cos\theta+p\text{ ou }\rho=-e\rho\cos\theta-p\\&\Leftrightarrow\rho(1-e\cos\theta)=p\text{ ou }\rho(1+e\cos\theta)=-p\Leftrightarrow\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}\text{ ou }\rho=\frac{-p}{1+e\cos\theta}\\&\Leftrightarrow\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta}\text{ ou }-\rho=\frac{p}{1-e\cos(\theta+\pi)}\end{aligned}$$

Comme les coordonnées polaires (ρ, θ) et $(-\rho, \theta + \pi)$ correspondent au même point, une seule de ces équations suffit à définir la conique, d'où le résultat. ■

Exercice 2
On considère dans un repère orthonormé direct la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x - y = 2$ et le point $F \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$.

Donner, dans le repère $\mathcal{R}_F$ l'équation de la conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité $\dfrac{1}{2}$.

Solution 2
Cette équation est $x^2 + y^2 = (ex + p)^2$. On sait que $e = \dfrac{1}{2}$ et il suffit par conséquent de calculer p. On a :

$$p = eh = \frac{1}{2} d(F, \mathcal{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{|1 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où l'équation :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Méthode 1 (Reconnaitre une conique définie par son équation polaire)
On considère la courbe d'équation polaire $r = \rho(\theta)$ où :

$$\rho(\theta) = \frac{a}{b - c\cos\theta - d\sin\theta}$$

avec a et b non nuls et c et d non tous deux nuls. Il est toujours possible d'écrire $c\cos\theta + d\sin\theta$ sous la forme :

$$c\cos\theta + d\sin\theta = \sqrt{c^2 + d^2}\cos(\theta - \phi)$$

ce qui permet d'écrire ensuite :

$$\rho(\theta) = \frac{\dfrac{a}{b}}{1 - \dfrac{\sqrt{c^2 + d^2}}{b}\cos(\theta - \phi)}$$

En réalisant un changement de repère par rotation d'angle ϕ, la courbe est décrite dans le nouveau repère par l'équation polaire $r = P(\Theta)$ avec :

$$P(\Theta) = \frac{\dfrac{a}{b}}{1 - \dfrac{\sqrt{c^2 + d^2}}{b}\cos(\Theta)}$$

C'est donc la conique de foyer l'origine du repère, d'axe focal l'axe des abscisses, de paramètre $\dfrac{a}{b}$ et d'excentricité $\dfrac{\sqrt{c^2 + d^2}}{b}$.

Exercice 3
Déterminer le type des coniques déterminées par les représentations polaires suivantes ainsi que les valeurs de e et p et l'équation de leur directrice :

$$r = \frac{2}{1 - 2\cos\theta}, \quad r = \frac{1}{1 - 2\sin\theta}, \quad r = \frac{1}{1 - \cos\theta - \sin\theta}$$

Solution 3

1. La première équation est celle d'une hyperbole dont la directrice a pour équation $x = -\dfrac{2}{2} = -1$;

2. La deuxième équation n'a pas directement la forme qui convient. Posons $\theta = \theta' + \dfrac{\pi}{2}$ (autrement dit, effectuons une rotation du repère de départ, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$). On a $\sin\theta = \sin(\theta' + \dfrac{\pi}{2}) = \cos\theta'$. Dans ce nouveau repère, l'équation devient $r = \dfrac{1}{1 - 2\cos\theta'}$. C'est donc une hyperbole, dont la directrice a pour équation dans le nouveau repère $X = -\dfrac{1}{2}$. Son équation dans l'ancien repère est donc $y = -\dfrac{1}{2}$;

3. Pour la troisième équation, constatons que :

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$$

   En posant $\theta' = \theta - \dfrac{\pi}{4}$, l'équation considérée devient $r = \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}\cos\theta'}$. On obtient ainsi une hyperbole de directrice d'équation $X = -\sqrt{2}2$ dans le nouveau repère. Comme $X = \sqrt{2}2x + \sqrt{2}2y$, l'équation de cette directrice est $x + y = -1$ dans l'ancien repère.

2 Paraboles

Dans cette section, $\mathcal{C}$ désigne une parabole de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et de paramètre p. Rappelons que nous avons montré plus haut qu'une telle conique possède un unique sommet que nous noterons S. On note $\mathcal{R}_S$ le repère ayant les mêmes axes que $\mathcal{R}_F$ mais dont l'origine est le sommet S. Rappelons que S a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ dans le repère $\mathcal{R}_F$ et, par conséquent, que F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}_S$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $X = -\frac{p}{2}$ dans $\mathcal{R}_S$. On passe des coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_S$ aux coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_F$ de la manière suivante :

$$x = X - \frac{p}{2}, \quad y = Y$$

2.1 Equation réduite et paramétrage

Proposition 2 (Équation réduite et paramétrage de la parabole dans $\mathcal{R}_S$)
Dans le repère $\mathcal{R}_S$, la parabole $\mathcal{C}$ admet pour équation :

$$Y^2 = 2pX$$

et est le support de la courbe paramétrée de composantes :

$$X(t) = \frac{t^2}{2p}, \quad Y(t) = t$$

Preuve :
Rappelons que, dans le repère $\mathcal{R}_F$, $\mathcal{C}$ admet pour équation $x^2 + y^2 = (x+p)^2$, autrement dit $y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$. Il suffit de remplacer x par $X - \frac{p}{2}$ et y par Y pour obtenir l'équation dans le nouveau repère. ■

Remarque 1
On observe que :

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0, \quad \lim_{t \mapsto -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$$

On en déduit que la parabole possède deux branches paraboliques, de direction l'axe focal.

Exercice 4
Déterminer le foyer et la directrice de la parabole d'équation $y^2 = 3x$.
Que dire de l'ensemble de points d'équation $x^2 = 3y$?

Solution 4
$\underline{y^2 = 3x}$: Le sommet est $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$, $p = \frac{3}{2}$, le foyer a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} \frac{3}{4} \\ 0 \end{array} \right.$ et la directrice a pour équation $x = -\frac{3}{4}$.

$\underline{x^2 = 3y}$: Si l'on effectue la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ alors le point de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère orthonomé direct a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = y \\ Y = -x \end{array} \right.$, l'équation devient

$$x^2 = 3y \Leftrightarrow (-Y)^2 = 3X \Leftrightarrow Y^2 = 3X$$

- Le sommet a donc pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$,
- $p = \frac{3}{2}$,
- le foyer a pour coordonnées dans le nouveau repère $\left| \begin{array}{l} X = \frac{3}{4} \\ Y = 0 \end{array} \right.$ donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{3}{4} \end{array} \right.$
- le directrice a pour équation dans le nouveau repère $X = -\frac{3}{4}$ donc dans l'ancien repère son équation est $y = -\frac{3}{4}$.

2.2 Tangentes

Proposition 3 (Tangente à la parabole : principe de dédoublement)
Dans le repère $\mathcal{R}_S$, la tangente à la parabole d'équation cartésienne $Y^2 = 2pX$ au point de coordonnées (X_0, Y_0) admet pour équation cartésienne :

$$YY_0 = p(X + X_0)$$

Preuve :
En utilisant le paramétrage de la parabole vu plus haut, notons t_0 un paramètre associé au point de coordonnées (X_0, Y_0). La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $(\frac{t_0}{p}, 1)$ et admet pour équation $(X - X_0) - \frac{t_0}{p}(Y - Y_0) = 0$, autrement dit $p(X - X_0) - t_0 Y + t_0 Y_0 = 0$. On sépare les parties en X de celles en Y, puis on utilise le fait que $t_0 = Y_0$ et $t_0^2 = 2pX_0$:

$$t_0 Y = pX - pX_0 + t_0 Y_0 \Leftrightarrow Y_0 Y = pX - pX_0 + 2pX_0 \Leftrightarrow YY_0 = p(X + X_0)$$

■

Exercice 5
On considère la parabole d'équation $X = Y^2$. Déterminer sa tangente aux points $M \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$ et $P \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right.$.

Solution 5
On applique le principe de dédoublement $X + 1 - 2Y = 0$ et $X + 1 + 2Y = 0$.

3 Ellipses

Dans cette section, $\mathcal{C}$ désigne une ellipse de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité $e < 1$, de foyer F et de paramètre p. Rappelons que nous avons montré plus haut qu'une telle conique possède deux sommets distincts que nous noterons S et S' et le milieu Ω de S et S' est appelé centre de la conique. On note $\mathcal{R}_\Omega$ le repère dont les axes sont ceux de $\mathcal{R}_F$ et donc l'origine est située en Ω. Rappelons que Ω a pour coordonnées $\left(\frac{ep}{(1-e^2)}, 0\right)$ dans le repère $\mathcal{R}_F$ et, par conséquent, que F a pour coordonnées $\left(-\frac{ep}{(1-e^2)}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}_\Omega$. Ainsi, les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_F$ se déduisent des coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_\Omega$ par :

$$x = X + \frac{pe}{1-e^2}, \quad y = Y$$

3.1 Equation réduite et paramétrage

Proposition 4 (Équation réduite et paramétrage de l'ellipse dans $\mathcal{R}_\Omega$)
Dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$, l'ellipse $\mathcal{C}$ admet pour équation :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

où on a posé $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. L'ellipse $\mathcal{C}$ est également le support de la courbe paramétrée de composantes :

$$X(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t$$

Preuve :
Nous avions obtenu plus haut l'équation suivante dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$:

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2}X^2 + \frac{1-e^2}{p^2}Y^2 = 1$$

ce qui conduit bien à l'équation voulue. En effet, on sait que, pour $u, v \in \mathbb{R}$, on a :

$$u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}. \quad u = \cos t \text{ et } v = \sin t$$

■

Remarque 2

1. On appelle a le demi-grand axe de l'ellipse et b le demi-petit axe. Quand à la distance $c = ea$ entre le foyer F et le centre Ω, on l'appelle demi-distance focale. Comme $0 < 1 - e^2 < 1$, on a $1 - e^2 < \sqrt{1-e^2}$ et $b < a$. En particulier, une ellipse n'est jamais un cercle (qui correspondrait au cas $e = 0$). Par contre, on voit sous cette forme que l'ellipse est contenue dans le cercle de centre Ω et de rayon a (appelé cercle principal de l'ellipse). L'ellipse peut d'ailleurs être considérée comme l'image du cercle principal par l'application qui, à un point M de coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_\Omega$, associe le point M' de coordonnées $(X, \frac{b}{a}Y)$. Cette application est appelée affinité orthogonale d'axe passant par Ω et dirigé par $\overrightarrow{i}$ et de rapport $\frac{b}{a}$;
2. Sous cette forme, il est clair que l'ellipse est une conique bornée, symétrique par rapport à Ω, par rapport à l'axe focal et par rapport à la droite passant par Ω et parallèle à la directrice. Notons alors F' le symétrique du foyer F par rapport à Ω et $\mathcal{D}'$ la droite symétrique de $\mathcal{D}$. La conique $\mathcal{C}'$ de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité e est alors symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à Ω. On en déduit que $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ peut également être définie au moyen de la directrice $\mathcal{D}'$ et du foyer F' (avec la même excentricité). De plus, si M est un point de l'ellipse de coordonnées (X, Y), on a $|X| \leqslant a$ et, par conséquent, $\mathcal{C}$ est situé à l'intérieur de la portion du plan délimitée par les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Les foyers on pour coordonnées $(-ea, 0)$ et $(ea, 0)$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ tandis que les directrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations respectives $X = -\frac{a}{e}$ et $X = \frac{a}{e}$.

Exercice 6

Déterminer le foyer, l'excentricité et la directrice de l'ellipse d'équation $2x^2 + 3y^2 = 1$.
Que dire de l'ensemble de points d'équation $3x^2 + 2y^2 = 1$?

Solution 6

$\underline{2x^2 + 3y^2 = 1}$: Le centre de l'ellipse est $\Omega \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b < a, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1-e^2} \Leftrightarrow e = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Le foyer est $F \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{array} \right.$ et la directrice D a pour équation $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$\underline{3x^2 + 2y^2 = 1}$: Ici, on a « $a = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ » donc $b > a$. On considère la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ alors le point de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère orthonomé direct a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = y \\ Y = -x \end{array} \right.$, l'équation devient

$$3x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow 3(-Y)^2 + 2X^2 = 1 \Leftrightarrow 2X^2 + 3Y^2 = 1$$

- Le centre donc pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$,
- $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- le foyer F a pour coordonnées dans le nouveau repère $\left| \begin{array}{c} X = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ Y = 0 \end{array} \right.$ donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{c} x = 0 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{array} \right.$
- le directrice a pour équation dans le nouveau repère $X = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ donc dans l'ancien repère son équation est $y = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse paramétrée dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par $x(t) = a\cos t$ et $y(t) = b\sin(t)$. On considère le point M de paramètre t, déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.

Solution 7

Notons θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$. Si $\cos t = 0$, alors $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Sinon, on a $\tan\theta = \frac{b\tan(t)}{a}$ et on en déduit que $\theta = \arctan\left(\frac{b\tan(t)}{a}\right)$ ou $\theta = \arctan\left(\frac{b\tan(t)}{a}\right) + \pi$.

3.2 Définition bifocale

Proposition 5 (Définition bifocale de l'ellipse)
Notons F et F' les deux foyers de l'ellipse et $a = \dfrac{p}{(1-e^2)}$. On a :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \quad / \quad MF + MF' = 2a\}$$

Preuve :
Pour un poit M du plan, notons H (respectivement H') son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ (respectivement $\mathcal{D}'$). On sait que :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow MF' = eMH'$$

Par conséquent, si $M \in \mathcal{C}$, on a $MF + MF' = e(MH + MH')$. Or $MH + MH' = HH' = \dfrac{2a}{e}$ (car M est situé entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$), ce qui montre que $MF + MF' = 2a$. Réciproquement, supposons que $MF + MF' = 2a$ et notons $r = MF$ et θ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{FF'}$ vers $\overrightarrow{FM}$. Les relations d'Al-Kashi dans le triangle MFF' indiquent que :

$$MF^2 + FF'^2 - 2\cos\theta MF \times FF' = MF'^2$$

On remplace alors MF par r, MF' par $2a - r$ et FF' par $2c$:

$$r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\theta = (2a-r)^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$$

On en déduit que $(c^2 - a^2) + r(a - c\cos\theta) = 0$, autrement dit que $r(1 - e\cos\theta) = p$. Comme cette relation représente l'équation polaire de la conique, on en déduit que $M \in \mathcal{C}$. ■

3.3 Tangentes

Proposition 6 (Tangente à l'ellipse : principe de dédoublement)
Dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$, la tangente à l'ellipse d'équation cartésienne $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ au point de coordonnées (X_0, Y_0) admet pour équation cartésienne :

$$\frac{XX_0}{a^2} + \frac{YY_0}{b^2} = 1$$

Preuve :
En utilisant le paramétrage de l'ellipse vu plus haut, notons t_0 un paramètre associé au point de coordonnées (X_0, Y_0). La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $(-a\sin t_0, b\cos t_0)$ et admet donc pour équation $b\cos t_0(X - X_0) + a\sin t_0(Y - Y_0) = 0$. En remplacant $\cos t_0$ par $\dfrac{X_0}{a}$ et $\sin t_0$ par $\dfrac{Y_0}{b}$, il vient :

$$\frac{b}{a}XX_0 - \frac{b}{a}X_0^2 + \frac{a}{b}YY_0 - \frac{a}{b}Y_0^2 = 0$$

Ou, de manière équivalente :

$$\frac{b}{a}XX_0 + \frac{a}{b}YY_0 = \frac{b}{a}X_0^2 + \frac{a}{b}Y_0^2$$

En divisant par ab, et compte tenu du fait que le point de coordonnées (X_0, Y_0) est situé sur l'ellipse, il vient $\dfrac{XX_0}{a^2} + \dfrac{YY_0}{b^2} = 1$.
■

Exercice 8
Déterminer la tangente à l'ellipse d'équation cartésienne $X^2 + 4Y^2 = 1$ au point $M \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array} \right.$.

Solution 8
On applique le principe de dédoublement $\dfrac{1}{2}X + \sqrt{3}Y = 1$.

4 Hyperboles

Dans cette section, $\mathcal{C}$ désigne une hyperbole de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité $e > 1$, de foyer F et de paramètre p. Comme pour l'ellipse, nous savons qu'une telle conique possède également deux sommets distincts S et S'. On se place à nouveau dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$ centré en Ω (milieu de S et S') et donc les axes sont ceux de $\mathcal{R}_F$. Les coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}_F$ se déduisent des coordonnées (X, Y) dans $\mathcal{R}_\Omega$ par les formules :

$$x = X + \frac{pe}{1-e^2}, \quad y = Y$$

4.1 Équation réduite et paramétrage

Proposition 7 (Équation réduite et paramétrage de l'hyperbole dans $\mathcal{R}_\Omega$)
Dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$, l'hyperbole $\mathcal{C}$ admet pour équation :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

où on a posé $a = \dfrac{p}{(e^2-1)}$ et $b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. L'hyperbole $\mathcal{C}$ est également la réunion des supports des courbes paramétrées de composantes :

$$X(t) = \pm a \operatorname{ch} t, \quad Y(t) = b \operatorname{sh} t$$

Preuve :
L'équation cartésienne s'obtient de la même manière que pour l'ellipse, en écrivant x et y en fonction de X et Y dans l'équation générale d'une conique. Il suffit ensuite d'utiliser le fait que, pour $u, v \in \mathbb{R}$, on a :

$$u^2 - v^2 = 1 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}. \quad u = \pm \operatorname{ch} t \text{ et } v = \operatorname{sh} t$$

■

Remarque 3

1. On voit ainsi que Ω est un centre de symétrie pour l'hyperbole et qu'elle admet l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées du repère $\mathcal{R}_\Omega$ comme axes de symétrie. Notons alors F' le symétrique du foyer F par rapport à Ω et $\mathcal{D}'$ la droite symétrique de $\mathcal{D}$. On constate, comme dans le cas de l'ellipse, que $\mathcal{C}$ est également l'hyperbole de foyer F', de directrice $\mathcal{D}'$ et de même excentricité e. Les foyers on pour coordonnées $(-ea, 0)$ et $(ea, 0)$ dans $\mathcal{R}_\Omega$ tandis que les directrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations respectives $X = -\dfrac{a}{e}$ et $X = \dfrac{a}{e}$;

2. La distance $c = \Omega F = ea$ est appelée distance focale. Remarquons finalement que, si un point M de coordonnées (X, Y) appartient à l'hyperbole, on a $|X| \leqslant a$ et, par conséquent $\mathcal{C}$ est située hors de la portion du plan comprise entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$;

3. Considérons la branche de l'hyperbole support de la courbe paramétrée de composantes $X(t) = a \operatorname{ch} t$ et $Y(t) = b \operatorname{sh} t$. On observe que :

$$\begin{aligned} \lim_{t \mapsto +\infty} \frac{Y(t)}{X(t)} &= \lim_{t \mapsto +\infty} \frac{b}{a} \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{b}{a}, \quad \lim_{t \mapsto +\infty} y(t) - \frac{b}{a} x(t) = \lim_{t \mapsto +\infty} b(\operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t)) = 0 \\ \lim_{t \mapsto -\infty} \frac{Y(t)}{Y(t)} &= \lim_{t \mapsto -\infty} \frac{b}{a} \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = -\frac{b}{a}, \quad \lim_{t \mapsto -\infty} y(t) - \frac{b}{a} x(t) = \lim_{t \mapsto -\infty} b(\operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t)) = 0 \end{aligned}$$

   Par conséquent, la droite d'équation $y = \dfrac{b}{a} x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et la droite d'équation $y = -\dfrac{b}{a}$ est asymptote en $-\infty$. L'autre arc de courbe présente les mêmes asymptotes.

Exercice 9
Déterminer le foyer, la directrice et l'excentricité de l'hyperbole d'équation $2x^2 - 3y^2 = 1$.
Que dire de l'ensemble de points d'équation $3y^2 - 2x^2 = 1$?

Solution 9
<u>$2x^2 - 3y^2 = 1$</u> : Le centre est $\Omega \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{e^2-1} \Leftrightarrow e = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

donc le foyer est $F \left| \begin{array}{l} -\sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ 0 \end{array} \right.$ et la directrice D a pour équation $x = -\sqrt{\dfrac{3}{10}}$

<u>$3y^2 - 2x^2 = 1$</u> : On considère la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$ alors le point de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère orthonomé direct a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = y \\ Y = -x \end{array} \right.$, l'équation devient

$$3y^2 - 2x^2 = 1 \Leftrightarrow 3X^2 - 2(-Y)^2 = 1 \Leftrightarrow 3X^2 - 2Y^2 = 1$$

Il s'agit donc d'une hyperbole et voici ses éléments caractérisitiques.

- Le centre donc pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$,
- $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \dfrac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \sqrt{e^2 - 1} \Leftrightarrow e = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$
- le foyer F a pour coordonnées dans le nouveau repère $\left| \begin{array}{l} X = -\sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ Y = 0 \end{array} \right.$ donc ses coordonnées dans l'ancien sont $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\sqrt{\dfrac{5}{6}} \end{array} \right.$
- le directrice a pour équation dans le nouveau repère $X = -\sqrt{\dfrac{2}{15}}$ donc dans l'ancien repère son équation est $y = -\sqrt{\dfrac{2}{15}}$.

4.2 Définition bifocale

Proposition 8 (Définition bifocale de l'hyperbole)
Notons F et F' les deux foyers de l'hyperbole et $a = \dfrac{p}{e^2 - 1}$. On a :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \quad / \quad |MF - MF'| = 2a\}$$

Preuve :
Pour un poit M du plan, notons H (respectivement H') son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ (respectivement $\mathcal{D}'$). On sait que :

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow MF' = eMH'$$

Par conséquent, si $M \in \mathcal{C}$, on a $MF - MF' = e(MH - MH')$ et M étant situé à l'extérieur de la portion du plan délimitée par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on a $|MH - MH'| = HH'$ d'où $|MF - MF'| = eHH' = 2a$. Réciproquement, supposons que $|MF - MF'| = 2a$ et montrons que $M \in \mathcal{C}$. Ceci signifie que l;une des deux égalités $MF - MF' = 2a$ ou $MF' - MF = 2a$ est vraie et, comme les foyers F et F' jouent des rôles symétriques, on peut supposer que c'est la première égalité qui est vérifiée, autrement dit que $MF - MF' = 2a$. Posons $r = MF$ et notons θ une mesure de l'angle orienté de $\overrightarrow{FF'}$ vers $\overrightarrow{FM}$. Les relations d'Al-Kashi dans le triangle MFF' nous indiquent que :

$$MF^2 + FF'^2 - 2\cos\theta MF \times FF' = MF'^2$$

On remplace alors MF par r, MF' par $r - 2a$ et FF' par $2c$:

$$r^2 + 4c^2 - 4cr\cos\theta = (r - 2a)^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$$

Comme dans le cas de l'ellipse, on en déduit que $(c^2 - a^2) + r(a - c\cos\theta) = 0$, autrement dit que $r(1 - e\cos\theta) = p$. Comme cette relation représente l'équation polaire de la conique, on en déduit que $M \in \mathcal{C}$. ■

4.3 Tangentes

Proposition 9 (Tangente à l'hyperbole : principe de dédoublement)
Dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$, la tangente à l'hyperbole d'équation cartésienne $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ au point de coordonnées (X_0, Y_0) admet pour équation cartésienne :

$$\frac{XX_0}{a^2} - \frac{YY_0}{b^2} = 1$$

Preuve :
En utilisant le paramétrage vu plus haut, on note t_0 un paramètre associé au point de coordonnées (X_0, Y_0). La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $(\epsilon a \operatorname{sh} t_0, b \operatorname{ch} t_0)$ (avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$ suivant la branche considérée) et admet donc pour équation $b \operatorname{ch} t_0(X - X_0) - \epsilon a \operatorname{sh} t_0(Y - Y_0) = 0$. En remplaçant $\operatorname{ch} t_0$ par $\dfrac{\epsilon X_0}{a}$ et $\operatorname{sh} t_0$ par $\dfrac{Y_0}{b}$, il vient :

$$\frac{b}{a}\epsilon XX_0 - \frac{b}{a}\epsilon X_0^2 - \frac{a}{b}\epsilon YY_0 + \frac{b}{a}\epsilon Y_0^2 = 0$$

En divisant par ab et compte tenu du fait que le point de coordonnées (X_0, Y_0) est situé sur l'hyperbole, on obtient finalement :

$$\frac{XX_0}{a^2} - \frac{YY_0}{b^2} = \frac{X_0^2}{a^2} - \frac{Y_0^2}{b^2} = 1$$

■

Exercice 10
Déterminer la tangente à l'hyperbole d'équation cartésienne $X^2 - 4Y^2 = 1$ au point $M \left| \begin{array}{c} 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$.

Solution 10
On applique le principe de dédoublement $2X - 2\sqrt{3}Y = 1$.

5 Réduction d'une équation du second degré

On sait qu'un problème de géométrie, moyennant le choix d'un repère, peut se ramenener à un problème de calcul. Un exemple classique de tels problème consiste à décrire l'ensemble des points vérifiant certaines conditions. En passant par les coordonnées, il est possible d'obtenir une équation cartésienne de l'ensemble de points considéré et le problème est alors de reconnaitre cet ensemble. En général, l'équation obtenue est du second degré et nous allons montrer que ces équations peuvent toujours se ramener soit à des coniques, soit à des objets géométriques plus simples (le plan tout entier, l'ensemble vide, des droites ou encore des cercles). Pour démontrer ceci, nous n'allons pas travailler directement sur l'équation la plus générale mais plutôt commencer par considérer des cas particuliers puis montrer qu'il est possible de transformer l'équation de départ afin de se ramener à l'un de ces cas.

Définition 2
On appelle courbe du second degré tout sous ensemble $\mathcal{E}$ du plan $\mathcal{P}$ admettant dans un repère orthonormé direct une équation de la forme :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ et $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Le réel $\Delta = 4AC - B^2$ est appelé discriminant de l'équation. On dit que l'équation est sans terme rectangle lorsque $B = 0$ (le terme Bxy est appelé terme rectangle de l'équation). On dit que l'équation est sous forme réduite lorsqu'elle se présente sous l'une des formes suivantes (avec $A \neq 0$ et $C \neq 0$) :

$$y^2 = Dx + F, \quad Ax^2 + Cy^2 = F$$

Remarque 4
Une équation sous forme réduite est donc un cas particulier d'équation sans terme rectangle (elle-même un cas particulier d'équation du second degré). Il n'est pas difficile de constanter qu'une courbe du second degré admet une équation de la forme précédente dans tout repère orthonormé (les coefficients peuvent, bien entendu, varier d'un repère à l'autre).

5.1 Équations sous forme réduite

Proposition 10 (Équation réduite, $\Delta = 0$)
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré décrite dans un repère orthonormé direct par une équation réduite de la forme :

$$y^2 = Dx + F$$

Alors $\mathcal{E}$ est soit une parabole, soit vide, soit réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues).

Preuve :
On raisonne suivant le signe (strict) de D :

1. si $D = 0$, l'équation s'écrit alors $y^2 = F$. Par conséquent, si $F \geqslant 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est réunion des deux droites parallèles (éventuellement confondues) d'équations $y = \sqrt{F}$ et $y = -\sqrt{F}$ et, si $F > 0$, $\mathcal{E}$ est vide;
2. si $D > 0$, l'équation s'écrit alors $y^2 = D\left(x + \frac{F}{D}\right)$. C'est l'équation de la parabole de foyer de coordonnées $\left(\frac{D}{4} - \frac{F}{D}, 0\right)$, de paramètre $\frac{D}{2}$ et de directrice d'équation $x = -\frac{D}{4} - \frac{F}{D}$;
3. si $D < 0$, l'équation s'écrit alors $y^2 = D\left(x + \frac{F}{D}\right)$. C'est l'équation de la parabole de foyer de coordonnées $\left(\frac{D}{4} - \frac{F}{D}, 0\right)$, de paramètre $\frac{-D}{2}$ et de directrice d'équation $x = -\frac{D}{4} + \frac{F}{D}$ (effectuer la rotation de centre $\left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $+\frac{\pi}{2}$).

■

Exercice 11
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ donné par son équation dans un repère orthonormé direct :

$$y^2 = 0, \quad y^2 = -1, \quad y^2 = 1, y^2 = -2x, \quad y^2 = -2x + 1, \quad y^2 = -2x - 1, \quad y^2 = 2x, \quad y^2 = 2x + 1, \quad y^2 = 2x - 1$$

Solution 11

- $\underline{y^2 = 0}$: $y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Il s'agit de la droite d'équation $y = 0$.
- $\underline{y^2 = -1}$: cette égalité est impossible dans $\mathbb{R}$ donc il s'agit de l'ensemble vide.
- $\underline{y^2 = 1}$: $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -1$ ou $y = 1$. Il s'agit de l'union des deux droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$.
- $\underline{y^2 = -2x}$: $y^2 = -2x \Leftrightarrow 2(-x)$. Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = \frac{1}{2}$.
- $\underline{y^2 = -2x + 1}$:On commence par remarquer que

$$y^2 = -2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

  Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
- $\underline{y^2 = -2x - 1}$: On commence par remarquer que

$$y^2 = -2x - 1 \Leftrightarrow y^2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

  Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.
- $\underline{y^2 = 2x}$: Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
- $\underline{y^2 = 2x + 1}$: On commence par remarquer que

$$y^2 = 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

  Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$.
- $\underline{y^2 = 2x - 1}$: On commence par remarquer que

$$y^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

  Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right.$ et de directrice d'équation $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Proposition 11 (Équation réduite, $\Delta < 0$)
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré décrite dans un repère orthonormé direct par une équation réduite de la forme :

$$Ax^2 + Cy^2 = F$$

avec $A, C, F \in \mathbb{R}$ et $AC > 0$. Alors $\mathcal{E}$ est soit une ellipse, soit vide, soit un cercle (éventuellement réduit à un point).

Preuve :
Comme A et C sont de même signe, il est toujours possible de supposer $A > 0$ et $C > 0$ (quitte à changer le signe de F). On raisonne alors suivant le signe (strict) de F :

- si $F = 0$, l'équation s'écrit $Ax^2 + Cy^2 = 0$ avec $A > 0$ et $C > 0$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ est réduit à l'origine du repère;
- si $F < 0$, alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide;
- si $F > 0$, alors on distingue deux cas :
  - si $a = \sqrt{\dfrac{F}{A}} > b = \sqrt{\dfrac{F}{C}}$, l'équation s'écrit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyer de coordonnées $(-c, 0)$ (où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ et de directrice d'équation $x = -\dfrac{a}{e}$,
  - si $b = \sqrt{\dfrac{F}{A}} < a = \sqrt{\dfrac{F}{C}}$, l'équation s'écrit $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ et $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyer de coordonnées $(0, -c)$ (où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ et de directrice d'équation $y = -\dfrac{a}{e}$ (effectuer la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$);
  - si $a = \sqrt{\dfrac{F}{A}} = \sqrt{\dfrac{F}{C}}$, l'équation s'écrit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ et $\mathcal{E}$ est le cercle de centre l'origine du repère et de rayon a.

■

Exercice 12
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ donné par son équation dans un repère orthonormé direct :

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 = -1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + 2y^2 = 1, \quad 2x^2 + y^2 = 1, \quad -x^2 - y^2 = 1$$

Solution 12

- $\underline{x^2 + y^2 = 0}$: La somme de deux réels positifs est nulle si et seulement chacun de ces réels est nul donc $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ donc il s'agit simplement du point $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$
- $\underline{x^2 + 2y^2 = -1}$: La somme de deux positifs étant un réel positif, on en déduit qu'il s'agit de l'ensemble vide.
- $\underline{x^2 + y^2 = 1}$: Il s'agit clairement du cercle de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et de rayon 1.
- $\underline{x^2 + 2y^2 = 1}$: Il s'agit d'une ellipse dont voici les éléments caractéristiques.

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b < a, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Le centre de la conique est $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$, son foyer F est $\left| \begin{array}{c} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{array} \right.$ et sa directrice D a pour équation $x = -\sqrt{2}$.

- $\underline{2x^2 + y^2 = 1}$: Il s'agit d'une ellipse dont voici les éléments caractéristiques

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  Le centre de la conique est $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$, son foyer F est $\left| \begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$ et sa directrice D a pour équation $y = -\sqrt{2}$.

- $\underline{-x^2 - y^2 = 1}$: La somme de deux négatifs étant un réel négatif, on en déduit qu'il s'agit de l'ensemble vide.

Proposition 12 (Équation réduite $\Delta < 0$)
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré décrite dans un repère orthonormé direct par une équation réduite de la forme :

$$Ax^2 + Cy^2 = F$$

avec $A, C, F \in \mathbb{R}$ et $AC < 0$. Alors $\mathcal{E}$ est soit une hyperbole, soit réunion de deux droites sécantes.

Preuve :
On raisonne suivant que F est nul ou non :

- si $F = 0$, on pose $a = \sqrt{|A|}$ et $b = \sqrt{|C|}$, de sorte que l'équation s'écrive $a^2x - b^2y = 0$, autrement dit $(ax+by)(ax-by) = 0$. Par conséquent, $\mathcal{E}$ est la réunion des droite d'équation $ax + by = 0$ et $ax - by = 0$ (sécantes au point de coordonnées $(0, 0)$);
- si $F \neq 0$, on raisonne suivant les signes respectifs de $\dfrac{A}{F}$ et $\dfrac{C}{F}$:
  - si $\dfrac{F}{A} > 0$ et $\dfrac{F}{C} < 0$, on pose $a = \sqrt{\dfrac{F}{A}}$ et $b = \sqrt{-\dfrac{F}{C}}$ de sorte que l'équation s'écrive $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors l'hyperbole de foyer F de coordonnées $(-c, 0)$ (où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ et de directrice d'équation $x = -\dfrac{a}{e}$,
  - si $\dfrac{F}{A} < 0$ et $\dfrac{F}{C} > 0$, on pose $b = \sqrt{-\dfrac{F}{A}}$ et $a = \sqrt{\dfrac{F}{C}}$ de sorte que l'équation s'écrive $-\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors l'hyperbole de foyer F de coordonnées $(0, -c)$ (où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), d'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$ et de directrice d'équation $y = -\dfrac{a}{e}$.

■

Exercice 13
Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ donné par son équation dans un repère orthonormé direct :

$$x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - 2y^2 = -1, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - 2y^2 = 1, \quad 2x^2 - y^2 = 1, \quad -x^2 + y^2 = 1$$

Solution 13
- $\underline{x^2 - y^2 = 0}$: $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$ donc il s'agit de l'union des deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.
- $\underline{x^2 - 2y^2 = -1}$: On commence par remarquer que $x^2 - 2y^2 = -1 \Leftrightarrow -x^2 + 2y^2 = 1$. Il s'agit d'une hyperbole de centre $\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right.$

$$b = 1, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$$

de foyer $F \left|\begin{array}{c} 0 \\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{array}\right.$ et de directrice D d'équation $y = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

- $\underline{x^2 - y^2 = 1}$: Il s'agit d'une hyperbole de centre $\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right.$,

$$a = b = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

de foyer $F \left|\begin{array}{c} -\sqrt{2} \\ 0 \end{array}\right.$ et de directrice D d'équation $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- $\underline{x^2 - 2y^2 = 1}$: Il s'agit d'une hyperbole de centre $\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}\right.$,

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad e = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

de foyer $F \left|\begin{array}{c} -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ 0 \end{array}\right.$ et de directrice D d'équation $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

- $\underline{2x^2 - y^2 = 1}$: Il s'agit d'une hyperbole de centre $\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = 1, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$$

de foyer $F\left|\begin{array}{c}-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\\0\end{array}\right.$ et de directrice D d'équation $x = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

- $\underline{-x^2 + y^2 = 1}$: Il s'agit d'une hyperbole de centre $\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$,

$$a = b = 1, \quad c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

de foyer $F\left|\begin{array}{c}0\\-\sqrt{2}\end{array}\right.$ et de directrice D d'équation $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Méthode 2 (Reconnaitre l'ensemble décrit par une équation sous forme réduite)

- *Si l'équation s'écrit $y^2 = F$, on raisonne suivant le signe de F;*
- *Si l'équation s'écrit $y^2 = Dx + F$ avec $D \neq 0$, on fait disparaitre le terme constant par une translation de repère et on reconnait l'équation d'une parabole (dont l'orientation dépend du signe de D);*
- *Si l'équation s'écrit $Ax^2 + Cy^2 = 0$, on raisonne suivant les signes respectifs de A et C en utilisant le fait que $a^2 + b^2 = 0$ si et seulement si $a = b = 0$ et $a^2 - b^2 = 0$ si et seulement si $a = \pm b$;*
- *Si l'équation s'écrit $Ax^2 + Cy^2 = F$ avec $F \neq 0$, on l'écrit sous la forme $A'x^2 + C'y^2 = 1$ et on raisonne suivant les signes de A' et C'.*

5.2 Mise sous forme réduite d'une équation sans terme rectangle

Proposition 13
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré décrite dans un repère orthonormé direct par une équation sans terme rectangle. Au moyen d'une translation de repère (et, éventuellement, d'une rotation d'un quart de tour), il est possible de ramener cette équation à une forme réduite.

Preuve :
On part de l'équation sans terme rectangle :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

On est alors dans un des cas suivants :

- si $A = 0$: on a alors $C \neq 0$ et l'équation s'écrit $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Il suffit donc, pour se ramener à une forme réduite, de faire disparaitre le terme Ey, ce que l'on fait en écrivant $Cy^2 + Ey$ comme le début d'un carré :

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = C\left(y + \frac{E}{2C}\right) + Dx + F - \frac{E^2}{4C}$$

Il suffit alors d'opérer une translation de repère de sorte que les coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère s'écrivent $X = x$ et $Y = y + \dfrac{E}{(2C)}$ et on obtient la forme réduite :

$$Y^2 + \frac{D}{C}X = \frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}$$

- si $C = 0$: on a alors $A \neq 0$ et l'équation s'écrit $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$. Il suffit donc, pour se ramener à une forme réduite, de faire disparaitre le terme Dx, ce que l'on fait en écrivant $Ax^2 + Dx$ comme le début d'un carré :

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = A\left(x + \frac{D}{2A}\right) + Ey + F - \frac{D^2}{4A}$$

Il suffit alors d'opérer une translation de repère de sorte que les coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère s'écrivent $X = x + \dfrac{D}{(2A)}$ et $Y = y$ et on obtient l'équation :

$$X^2 + \frac{E}{A}Y = \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$$

Pour obtenir enfin une forme réduite, il ne reste plus qu'à réaliser une rotation de repère d'un quart de tour. Ainsi les coordonnées (X', Y') dans le nouveau repère s'écrivent $X' = Y$ et $Y' = -X$ et on obtient la forme réduite :

$$Y'^2 + \frac{E}{A}X' = \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}$$

- si $A \neq 0$ et $C \neq 0$, on réalise conjointement les deux opérations précédentes :

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = A\left(x + \frac{D}{2A}\right) + C\left(y + \frac{E}{2C}\right) + F - \frac{E^2}{4C} - \frac{D^2}{4A}$$

  On réalise alors une translation de repère de sorte que les coordonnées (X, Y) dans le nouveau repère s'écrivent $X = x + \dfrac{D}{(2A)}$ et $Y = y + \dfrac{E}{(2C)}$ et on obtient la forme réduite :

$$AX^2 + CY^2 = \frac{E^2}{4C} + \frac{D^2}{4A} - F$$

■

Méthode 3 (Mettre sous forme réduite une équation sans terme rectangle)
Il suffit de mettre sous forme canonique $Ax^2 + Dx$ (si $A \neq 0$) et $Cy^2 + Ey$ (si $C \neq 0$) de façon à faire disparaitre, lorsque c'est possible, les termes du premier degré.

Exercice 14
Mettre sous forme réduite les équations sans terme rectangle suivantes puis déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ correspondant :

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0, \quad x^2 - y^2 - y - \frac{1}{4} = 0, \quad -x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0$$

Solution 14

1. $\underline{x^2 + 4x + 4y^2 = 0}$:

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 4y^2 = 0$$

   En effectuant la translation de vecteur $\left| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \right.$, un point de coordonnées $\left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère a pour coordonnées $\left| \begin{array}{c} X = x+2 \\ Y = y \end{array} \right.$ dans le nouveau repère. L'équation devient

$$x^2 + 4x + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 4Y^2 = 0$$

   Il s'agit d'une ellipe

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   dont le foyer F a pour coordonnées $\left| \begin{array}{c} X = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = 0 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère, donc de coordonnées $\left| \begin{array}{c} x = -2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = 0 \end{array} \right.$ dans l'ancien repère, et de directrice D d'équation $X = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ dans le nouveau repère donc d'équation $x = -2 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ dans l'anvien repère.

2. $\underline{x^2 - y^2 - y - 1/4 = 0}$:

$$x^2 - y^2 - y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (y^2 + y) - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left[\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

En effectuant la translation de vecteur $\left| \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$, un point de coordonnées $\left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = x \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{array} \right.$ dans le nouveau repère. L'équation devient

$$x^2 - y^2 - y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow X^2 - Y^2 = 0 \Leftrightarrow (X - Y)(X + Y) = 0 \Leftrightarrow Y = X \text{ ou } Y = -X$$

Il s'agit de la réunion des deux droites d''équations $Y = X$ et $Y = -X$ dans le nouveau repère donc d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ et $y = -x - \frac{1}{2}$ dans l'ancien repère.

3. $\underline{-x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0}$:

$$\begin{aligned} -x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 &= 0 \Leftrightarrow -\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 - 2y\right) - 8 = 0 \Leftrightarrow -\left[(x-1)^2 - 1\right] + \left[(y-1)^2 - 1\right] - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-1)^2 + (y-1)^2 - 8 = 0 \end{aligned}$$

En effectuant la translation de vecteur $\left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right.$, un point de coordonnées $\left| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right.$ dans l'ancien repère a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère. L'équation devient

$$-x^2 + y^2 + 2x - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow -X^2 + Y^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow -\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{8} = 1$$

Il s'agit d'une hyperbole

$$a = b = 2\sqrt{2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

de foyer F de coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = -4 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère donc de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x = 1 \\ -3 \end{array} \right.$ dans le nouveau repère, et de directrice d'équation $Y = -2$ dans le nouveau repère donc d'équation $y = -1$ dans l'ancien repère.

5.3 Elimination du terme rectangle

Proposition 14
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré. Au moyen d'une rotation du repère, il est toujours possible de ramener cette équation à une équation sans terme rectangle. Précisément, si l'équation de $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormé direct est : equation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ finequation et si le nouveau repère est obtenu par rotation de l'ancien d'un angle θ, le terme rectangle de l'équation dans le nouveau repère est :

$$B\cos(2\theta) - (A - C)\sin(2\theta)$$

Pour annuler ce terme, il suffit de définir θ en posant : $\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } A = C \\ \frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C} & \text{si } A \neq C \end{cases}$

Preuve :
Les coordonnées (x, y) dans le repère de départ se déduisent des coordonnées (X, Y) dans le repère obtenu par rotation d'un angle θ au moyen des relations :

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta, \quad y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

Dans le nouveau repère, l'équation de $\mathcal{E}$ s'écrit donc :

$$A(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + B(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta) + C(X\sin\theta + Y\cos\theta) + D(X\cos\theta - Y\sin\theta) + E(X\sin\theta + Y\cos\theta) + F = 0$$

Cette équation est clairement de la forme :

$$A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2 + 2D'X + 2E'Y + F' = 0$$

avec en particulier :

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \\ B' &= -2A\cos\theta\sin\theta + B\cos^2\theta - B\sin^2\theta + 2C\sin\theta\cos\theta \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \end{aligned}$$

et le coefficient du terme rectangle est donc :

$$B' = -2A\cos\theta\sin\theta + B\cos^2\theta - B\sin^2\theta + 2C\sin\theta\cos\theta = (C-A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta)$$

Si l'angle θ est choisi de telle sorte que $(A-C)\sin(2\theta) = B\cos(2\theta)$, on aura alors $B' = 0$. Si $A = C$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ convient et sinon il suffit de prendre :

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

■

Méthode 4 (Éliminer le terme rectangle)
Pour éliminer le terme rectangle dans l'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, on réalise le changement de repère $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$, $y = X\sin\theta + Y\cos\theta$ où θ est choisi de la manière suivante :

- *si $A = C$, $\theta = \frac{\pi}{4}$;*
- *si $A \neq C$, $\theta = \dfrac{\arctan\left(\dfrac{B}{A-C}\right)}{2}$ et plusieurs cas se présentent :*
  - *on peut déterminer 2θ ainsi que $\cos\theta$ et $\sin\theta$, il n'y a plus alors qu'à réaliser le changement de variables;*
  - *on peut déterminer 2θ ainsi que $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ mais $\cos\theta$ et $\sin\theta$ ne sont pas connus, on utilise alors le formules suivantes pour les calculer :*

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}, \quad \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

  - *ni 2θ ni θ ne sont des angles connus, on peut cependant calculer $\cos(2\theta)$ en utilisant la relation :*

$$\cos(\arctan t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

puis on calcule $\cos\theta$ et $\sin\theta$ à partir de $\cos(2\theta)$ en utilisant les formules précédentes (ce cas de figure est, en pratique, relativement rare).

Bien que l'on sache que cette méthode produit toujours une équation sans terme rectangle, il est conseillé de mener quand même les calculs afin de diminuer le risque d'erreurs.

Exercice 15
Eliminer le terme rectangle dans les équations suivantes :

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0, \quad -x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2 = 0$$

Solution 15

- $\underline{x^2 - xy + y^2 - 1 = 0}$: Puisque $A = C = 1$, on peut effectuer la rotation de centre $\left|\begin{array}{l}0\\0\end{array}\right.$ et d'angle $-\theta$ avec $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc

$$\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right. = \mathcal{R}_{-\theta}\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right. = \mathcal{R}_{\theta}\left|\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = X\cos\theta - Y\sin\theta\\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\end{array}\right.$$

et l'équation devient

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)^2 - \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y) + \frac{1}{2}(X+Y)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = 1$$

Il s'agit donc d'une ellipse

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b > a, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dont le foyer F a pour coordonnées $\left|\begin{array}{l}X = 0\\ Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$ dans le nouveau repère donc de coordonnées $\left|\begin{array}{l}x = \frac{1}{2}\\ y = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$ dans l'ancien repère, et de directrice d'équation $Y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ dans le nouveau repère donc d'équation

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-y}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x - y = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow y = x + \frac{4}{3}$$

dans le nouveau repère.

- $\underline{-x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2 = 0}$: Puisque $A \neq C$, on effectue la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $-\theta$ avec

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-1-1}\right) = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. = \mathcal{R}_{-\theta} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. = \mathcal{R}_{\theta} \left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{array} \right.$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} -x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y\right)\left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) + \left(\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2X^2 + 2Y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow -X^2 + Y^2 = 1 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une hyperbole

$$a = b = 1, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

dont le foyer F a pour coordonnées $\left| \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = -\sqrt{2} \end{array} \right.$ dans le nouveau repère donc de coordonnées $\left| \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} \right.$ dans l'ancien repère, et de directrice d'équation $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans le nouveau repère. Puisque l'on a

$$\left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. = \mathcal{R}_{-\theta} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = x\cos\theta + y\sin\theta \\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ Y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{array} \right.$$

l'équation de la directrice dans l'ancien repère est

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exercice 16
Eliminer le terme rectangle dans :

$$-x^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}xy + y^2 - 2 = 0$$

(on pourra calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à partir de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$).

Solution 16
On trouve $\theta = \frac{\pi}{12}$. Alors :

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(\frac{\pi}{6})}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ce qui conduit à réaliser le changement de repère :

$$x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}X - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}Y, \quad y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}X + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}Y$$

On trouve pour équation dans le nouveau repère $-\frac{X^2}{\sqrt{3}} + \frac{Y^2}{\sqrt{3}} = 1$. On pose $a = b = \sqrt[4]{3}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}$. L'ensemble obtenu est alors l'hyperbole de foyer de coordonnées $X = 0$, $Y = -c = -\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$, d'excentricité $e = \sqrt{2}$ et de directrice d'équation $Y = -\frac{a}{e} = -\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. Il ne reste plus qu'a revenir dans l'ancien repère ce qui est facile puisque :

$$X = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}x + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}y, \quad Y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}x + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}y$$

Exercice 17
Eliminer le terme rectangle dans :
$$x^2 + 4xy - y^2 - 2 = 0$$
(on commencera par calculer $\cos(\arctan(2))$ puis on en déduire $\cos\left(\dfrac{\arctan(2)}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\arctan(2)}{2}\right)$.)

Solution 17
On trouve $\theta = \dfrac{\arctan(2)}{2}$. Donc :
$$\cos\arctan(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\arctan(2)}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\arctan(2)}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$
Ceci conduit à poser le changement de repère :
$$x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}X - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}Y, \quad y = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}X + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}Y$$
L'équation dans le nouveau repère est alors $\dfrac{\sqrt{5}X^2}{2} - \dfrac{\sqrt{5}Y^2}{2} = 1$. On trouve une hyperbole et il est facile de revenir dans l'ancien repère, puisque :
$$X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}x + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}y, \quad Y = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}x + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}y$$

5.4 Discriminant

Proposition 15
Le discriminant d'une équation reste inchangé lorsque l'on effectue un changement de repère orthonormé direct. Le signe strict du discriminant est inchangé lorsque l'on multiplie l'équation par une constante non nulle.

Preuve :
Un changement de repère orthonormé direct peut toujours être décomposé en un changement de repère par rotation suivi d'un changement de repère par translation. Partant d'une équation du second degré de la forme :
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
si on réalise un changement de variables de la forme $x = X + a$ et $y = Y + b$ (autrement dit une translation de repère), l'équation dans le nouveau repère s'écrit :
$$AX^2 + BXY + CY^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$
et le discriminant est inchangé. Si maintenant on réalise un changement de variables de la forme $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$ et $y = X\sin\theta + Y + \cos\theta$ (autrement dit une rotation du repère), l'équation dans le nouveau repère s'écrit :
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$
avec :
$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \\ B' &= 2(C-A)\cos\theta\sin\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \end{aligned}$$
On écrit $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ et $\cos\theta\sin\theta$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:
$$\begin{aligned} A' &= A\frac{\cos(2\theta)+1}{2} + B\frac{\sin(2\theta)}{2} + C\frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{A+C}{2} + \cos(2\theta)\frac{A-C}{2} + \sin(2\theta)\frac{B}{2} \\ B' &= (C-A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta) \\ C' &= A\frac{1-\cos(2\theta)}{2} - B\frac{\sin(2\theta)}{2} + C\frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{A+C}{2} - \cos(2\theta)\frac{A-C}{2} - \sin(2\theta)\frac{B}{2} \end{aligned}$$

On développe ensuite $4A'C'$ et ${B'}^2$ en utilisant les identités remarquables, puis on soustrait :

$$\begin{aligned}
{B'}^2 &= \sin^2(2\theta)(C-A)^2 + \cos^2(2\theta)B^2 + 2\cos(2\theta)\sin(2\theta)B(C-A) \\
4A'C' &= (A+C)^2 - (\cos(2\theta)(A-C) + \sin(2\theta)B)^2 \\
&= (A+C)^2 - \cos^(2\theta)(A-C)^2 - \sin^2(2\theta)B^2 - 2\cos(2\theta)\sin(2\theta)B(A-C) \\
{B'}^2 - 4A'C' &= B^2 - (A+C)^2 - (A-C)^2 = B^2 - 4AC
\end{aligned}$$

et le discriminant reste inchangé. Finalement, si l'équation est multipliée par une constante non nulle λ, le discriminant est multiplié par $\lambda^2 > 0$ et son signe (strict) est donc inchangé. ■

Lorsque nous avons réduit l'équation du second degré pour aboutir aux coniques (ou aux formes dégénérées), nous avons effectué des changement de repères par translation et rotation, ce qui ne change pas le discriminant de l'équation. Nous avons également effectué des multiplications de léquation par une constante non nulle (ce qui peut changer le discriminant, mais pas son signe strict). On en déduit que, au cours des réductions qui ont été effectuées, le signe (strict) du discriminant est resté inchangé. On a donc le résultat suivant.

Proposition 16
Soit $\mathcal{E}$ une courbe du second degré, dont une équation dans un repère orthonormé a pour discriminant Δ. On est alors dans un, et un seul, des cas suivants :

1. *$\Delta = 0$ et $\mathcal{E}$ est soit une parabole, soit vide, soit réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues);*
2. *$\Delta > 0$ et $\mathcal{E}$ est soit une hyperbole, soit vide, soit un cercle (éventuellement réduit à un point);*
3. *$\Delta < 0$ et $\mathcal{E}$ est soit une ellipse, soit réunion de deux droites sécantes.*

Lorsqu'il est possible d'affirmer que $\mathcal{E}$ est une conique (par exemple, par construction) on a :

$$\begin{array}{lll}
\Delta = 0 & \text{si et seulement si} & \mathcal{E} \text{ est une parabole} \\
\Delta < 0 & \text{si et seulement si} & \mathcal{E} \text{ est une ellipse} \\
\Delta > 0 & \text{si et seulement si} & \mathcal{E} \text{ est une hyperbole}
\end{array}$$

Méthode 5 (Reconnaitre l'ensemble défini par une équation du second degré)

1. *On calcule le discriminant afin de savoir quel type d'ensemble on va obtenir;*
2. *Si l'équation présente un terme rectangle, on l'élimine;*
3. *On met sous forme réduite l'équation sans terme rectangle obtenue;*
4. *On reconnait l'ensemble décrit par l'équation sous forme réduite et on donne ses éléments caractéristiques (foyer, excentricité, directrice, centre éventuellement) dans le repère dans lequel l'équation est réduite;*
5. *On décrit les éléments caractéristiques dans le repère de départ (en inversant le changement de variables).*

Exercice 18
Reconnaitre l'ensemble défini par les équations du second degré suivantes :

$$xy + x + y - 1 = 0, \quad 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + x - 1 = 0$$

Solution 18

- $\underline{xy + x + y - 1 = 0}$: On commence par éliminer le terme en xy. Puisque $A = C = 0$, on choisit $\theta = \frac{\pi}{4}$. On effectue la rotation de centre $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$ et d'angle $-\theta$ donc

$$\left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. = \mathcal{R}_{-\theta} \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right. = \mathcal{R}_{\theta} \left| \begin{array}{l} X \\ Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{array} \right.$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} xy+x+y-1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)-1=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2+\sqrt{2}X-\frac{1}{2}Y^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(X^2+2\sqrt{2}X\right)-\frac{1}{2}Y^2-1=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\left(X+\sqrt{2}\right)^2-2\right]-\frac{1}{2}Y^2-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(X+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{4}Y^2=1 \end{aligned}$$

On effectue ensuite la translation de vecteur $\left|\begin{array}{c}\sqrt{2}\\0\end{array}\right.$. Un point de coordonnées $\left|\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\right.$ dans l'ancien repère $\mathcal{R}$ a pour coordonnées $\left|\begin{array}{c}S=X+\sqrt{2}\\T=Y\end{array}\right.$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$. L'équation devient

$$\frac{1}{4}\left(X+\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{4}Y^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}S^2-\frac{1}{4}T^2=1$$

Il s'agit donc d'une hyperbole. Déterminons ses éléments caractéristiques.

$$a=b=\frac{1}{2}, \quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$$

de foyer F de coordonnées $\left|\begin{array}{c}S=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\T=0\end{array}\right.$ dans le repère $\mathcal{R}'$ et de directrice d'équation $X=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Il reste à revenir dans le repère initial. Il est immédiat que $X=S-\sqrt{2}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $Y=T=0$ et

$$\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right. = \mathcal{R}_\theta\left|\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=X\cos\theta-Y\sin\theta\\y=X\sin\theta+Y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\right. = \mathcal{R}_{-\theta}\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}X=x\cos\theta+y\sin\theta\\Y=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\\Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\end{array}\right.$$

Par conséquent, le foyer F a pour coordonnées $\left|\begin{array}{c}x=-\frac{3}{2}\\y=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$ dans le repère initial et de directrice d'équation

$$X=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x+y=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=-x-\frac{1}{2}$$

dans le repère initial.

- $\underline{3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+x-1=0}$: On commence par éliminer le terme en xy. Puisque $3=A\neq C=1$, on effectue la rotation de centre $\left|\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right.$ et d'angle $-\theta$ avec

$$\theta=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{B}{A-C}\right)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3-1}\right)=\frac{1}{2}\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\left|\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\right. =\mathcal{R}_{-\theta}\left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right. =\mathcal{R}_\theta\left|\begin{array}{c}X\\Y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=X\cos\theta-Y\sin\theta\\y=X\sin\theta+Y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{2}X+\frac{1}{2}Y\\y=-\frac{1}{2}X+\frac{\sqrt{3}}{2}Y\end{array}\right.$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned}
&3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + x - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)\left(-\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right) + \left(-\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4X^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}X + \frac{1}{2}Y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\left(X^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}X\right) + \frac{1}{2}Y - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left[\left(X + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 - \frac{3}{16^2}\right] + \frac{1}{2}Y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\left(X + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 - \frac{3}{16\times 4} + \frac{1}{2}Y - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left(X + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \frac{1}{2}Y - \frac{67}{64} \Leftrightarrow 4\left(X + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(Y - \frac{67}{32}\right) = 0
\end{aligned}$$

On effectue ensuite la translation de vecteur $\left|\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}}{16}\\ -\frac{67}{128}\end{array}\right.$. Un point de coordonnées $\left|\begin{array}{l}X\\ Y\end{array}\right.$ dans l'ancien repère $\mathcal{R}$ a pour coordonnées $\left|\begin{array}{l}S = X + \frac{\sqrt{3}}{16}\\ T = Y - \frac{67}{128}\end{array}\right.$ dans le nouveau repère $\mathcal{R}'$. L'équation devient

$$4\left(X + \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(Y - \frac{67}{32}\right) = 0 \Leftrightarrow 4S^2 + \frac{1}{2}T = 0 \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{8}T$$

Il s'agit donc d'une parabole, $p = \frac{1}{16}$ de foyer F de coordonnées $\left|\begin{array}{l}0\\ \frac{1}{32}\end{array}\right.$ dans le repère $\mathcal{R}'$ et de directrice d'équation $T = -\frac{1}{32}$ dans le repère $\mathcal{R}'$.
Il reste à revenir dans le repère initial. Il est immédiat que

$$X = S - \frac{\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{16} \quad \text{et} \quad Y = T + \frac{67}{128} = \frac{1}{32} + \frac{67}{128} = \frac{71}{128}$$

et

$$\left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. = \mathcal{R}_\theta \left|\begin{array}{l}X\\ Y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = X\cos\theta - Y\sin\theta\\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y\\ y = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}X\\ Y\end{array}\right. = \mathcal{R}_{-\theta} \left|\begin{array}{l}x\\ y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}X = x\cos\theta + y\sin\theta\\ Y = -x\sin\theta + y\cos\theta\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}X = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\\ Y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\end{array}\right.$$

Par conséquent, le foyer F a pour coordonnées $\left|\begin{array}{l}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{71}{128}\right) = \frac{47}{256}\\ y = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{16}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{71}{128}\right) = \frac{79\sqrt{3}}{256}\end{array}\right.$ dans le repère initial et de directrice d'équation

$$Y - \frac{67}{128} = -\frac{1}{32} \Leftrightarrow Y = \frac{63}{128} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{63}{128} \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{21\sqrt{3}}{64}$$

dans le repère initial.

5.5 Récapitulatif sur les coniques

Coniques générales dans $\mathcal{R}_F$

$h = d(F, \mathcal{D})$	
$p = eh$	Paramètre
$x = -h$	Équation de $\mathcal{D}$
$S \left\vert \begin{array}{l} -\dfrac{p}{1+e} \\ 0 \end{array} \right.$	Premier sommet
$S' \begin{array}{l} \dfrac{p}{1-e} \\ 0 \end{array}$	Second sommet (éventuellement)
$x^2 + y^2 = (ex+p)^2$	Équation cartésienne
$r = \dfrac{p}{(1 - e\cos\theta)}$	Équation polaire

Ellipses ($e < 1$) dans $\mathcal{R}_\Omega$

$\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Equation réduite
$a = \dfrac{p}{(1-e^2)}, \quad b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$	Demi-grand axe et demi-petit axe
$c = ea = \Omega F$	Demi-distance focale, $c^2 = a^2 - b^2$
$F \left\vert \begin{array}{l} -c \\ 0 \end{array} \right. , \quad F' \left\vert \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array} \right.$	Foyers
$\mathcal{D} : X = -\dfrac{a}{e}, \quad \mathcal{D}' : X = \dfrac{a}{e}$	Directrices
$MF + MF' = 2a$	Définition bifocale
$t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$	Représentation paramétrique
$\dfrac{XX_0}{a^2} + \dfrac{YY_0}{b^2} = 1$	Tangente en $M \left\vert \begin{array}{l} X_0 \\ Y_0 \end{array} \right.$

Paraboles ($e = 1$) dans $\mathcal{R}_S$

$Y^2 = 2pX$	Équation réduite
$X = -\dfrac{p}{2}$	Équation de $\mathcal{D}$
$F \left\vert \begin{array}{l} \dfrac{p}{2} \\ 0 \end{array} \right.$	Foyer
$t \mapsto (\dfrac{t^2}{(2p)}, t)$	Représentation paramétrique
$YY_0 = p(X + X_0)$	Tangente en $M \left\vert \begin{array}{l} X_0 \\ Y_0 \end{array} \right.$

Hyperboles ($e > 1$) dans $\mathcal{R}_\Omega$

$\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$	Équation réduite
$a = \dfrac{p}{(e^2-1)}, \quad b = \dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$	
$c = ea = \Omega F$	Demi-distance focale, $c^2 = a^2 + b^2$
$F \left\vert \begin{array}{l} -c \\ 0 \end{array} \right. , \quad F' \left\vert \begin{array}{l} c \\ 0 \end{array} \right.$	Foyers
$\mathcal{D} : X = -\dfrac{a}{e}, \quad \mathcal{D}' : X = \dfrac{a}{e}$	Directrices
$\lvert MF - MF' \rvert = 2a$	Définition bifocale
$t \mapsto (\pm a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$	Représentation paramétrique
$\dfrac{XX_0}{a^2} - \dfrac{YY_0}{b^2} = 1$	Tangente en $M \left\vert \begin{array}{l} X_0 \\ Y_0 \end{array} \right.$