1 Exercices

Exercice 1.1 1. On pose $A = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

(a) Justifier que $\dfrac{3\pi}{4} < A < \dfrac{3\pi}{2}$

(b) Calculer $\tan A$ (on commencera par calculer $\tan(\arctan 2 + \arctan 5)$)

(c) En déduire A

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = \dfrac{5\pi}{4}$

Exercice 1.2 Etudier la fonction $x \mapsto \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$

Exercice 1.3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 1.4 Etudier la fonction $x \mapsto \arctan \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 1.5 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle à expliciter.
2. Soit g sa réciproque.
   Donner le domaine de définition de g. Sur quel intervalle la fonction g est-elle dérivable ?

Exercice 1.6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) + \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 1.7 1. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.

(b) Calculer pour tout réel x les expressions $\operatorname{sh}(f(x))$ et $f(\operatorname{sh} x)$. Qu'en déduit-on ?

2. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x$. Retrouver $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x}$

Exercice 1.8 1. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

(a) Etudier f et justifier que f réalise une bijection de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ sur un intervalle à expliciter.

(b) Pour $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, calculer $\operatorname{ch}(f(x))$, $\operatorname{sh}(f(x))$ et $\operatorname{th}(f(x))$

2. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x$. Retrouver $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. (a) Donner l'encadrement de $\arctan x$, où x est un réel quelconque. Justifier que $\arctan 2 > \frac{\pi}{4}$, idem pour les autres arctan
   (b) pour l'indication $\tan(a+b) = \cdots$ puis $a+b+c = (a+b)+c$
   (c) Connaissant $\tan A$, trouver les valeurs possibles de A puis utiliser 1.a.
2. Justifier que l'on a affaire à une bijection puis utiliser le 1 pour trouver une solution.

Indication pour l'exercice 1.2 : Pour que l'expression existe, on se rappelle que arccos et arcsin sont respectivement définies sur .... puis on demande que $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\frac{2x}{1+x^2}$ appartiennent respectivement à .... Ensuite, soit on justifier que la fonction est dérivable et déterminer sa dérivée, soit on se ramène l'expression de $\cos a$ et $\sin a$ en fonction de $\tan(\frac{a}{2})$ puis justifier que tout réel x s'écrit $x = \tan\frac{a}{2}$ pour un a convenable.

Indication pour l'exercice 1.3 : Le logarithme est toujours l'ami du taupin (attention aux valeurs interdites)

Indication pour l'exercice 1.4 : La fonction arctan est définie sur .... puis on n'oublie par d'exiger que $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ doit exister et qu'il doit appartenir à ...

Indication pour l'exercice 1.5 :

1. Ecrire la dérivée sous la forme $\frac{g(x)}{(....)^2}$. Pour étudier le signe de g, dresser le tableau de variations de g et placer les bornes.
2. Revoir la définition de la réciproque d'une bijection puis utiliser le théorème de dérivabilité de la réciproque.

Indication pour l'exercice 1.6 : "Passer" à la tan dans l'équation (et ne pas oublier au préalable de déterminer les valeurs interdites). On se ramène à une équation du type $\frac{a}{b} = c$ et on effectue le produit en croix.

Indication pour l'exercice 1.7 :

1. (a) Le calcul soigneux de la dérivée combiné aux simplifications algébriques indispensables fournit directement le résultat.
   (b) Pour les deux premières expressions, utiliser la définition de sh et appliquer les simplifications de calculs nécessaires. Voir, dans cours sur les bijections, ce que l'on peut dire de deux fonctions f et g telles que $f(g(x)) = x$ et $g(f(x)) = x$ (sur des domaines convenables)
2. Un encadrement $a \leqslant b \leqslant c$ signifie $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Pour chaque inégalité, introduire une fonction convenable et dresser son tableau de variations en plaçant les bornes. Ensuite encadrer $\frac{e^x-1}{x}$ et utiliser le théorème d'encadrement.

Indication pour l'exercice 1.8 :

1. (a) Pour le domaine de définition : $\ln(A)$ existe si A est ..., puis $\tan B$ appartient à ...., ce qui implique que $x \in$ .... . Vérifier que f est 2π-périodique. Quant à la dérivée, utiliser soigneusement les formules de dérivation.
   (b) Que dire d'autre que de revoir les définitions des fonctions trigonométriques hyperboliques avec un soupçon de calcul.
2. Un encadrement $a \leqslant b \leqslant c$ signifie $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Pour chaque inégalité, introduire une fonction convenable et dresser son tableau de variations en plaçant les bornes. Si le signe d'une dérivée n'est pas évident, calculer la dérivée seconde pour en déduire le tableau de variations de la dérivée (bornes incluses). Ensuite encadrer $\frac{\sin x}{x}$ et utiliser le théorème d'encadrement.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. (a) Par définition de arctan, pour tout réel x, $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En outre, si $x > 1$, la stricte croissance de arctan montre que $\arctan x > \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent, on en déduit que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{\pi}{4} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

En appliquant cet encadrement à $x = 2$, 5 et 8 (qui appartiennent à $]1, +\infty[$ puis en additionnant les encadrements, on obtient que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$.

(b) On pose $S = \arctan 2 + \arctan 5$. En utilisant que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ et le fait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x,$$

on a

$$\tan S = \tan(\arctan 2 + \arctan 5)) = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arctan 5)}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arctan 5)} = -\frac{2+5}{1 - 2 \times 5} = -\frac{7}{9}.$$

donc

$$\tan A = \tan(S + \arctan 8) = \frac{\tan S + \tan(\arctan 8)}{1 - \tan S \tan(\arctan 8)} = \frac{-\frac{7}{9} + 8}{1 + \frac{7}{9} \times 8} = 1$$

(c) La question 1.b) montre que $\tan A = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ donc $A = \frac{\pi}{4} + k\pi$, pour un certain entier relatif k. En outre, la question 1.a) montrer que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$ donc on a nécessairement

$$\frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < k < \frac{5}{4}.$$

Puisque k est un entier, on en déduit que $k = 1$, c'est-à-dire $A = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

2. La fonction $x \to f(x) = \arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3)$ est continue et strictement croissante (comme somme de fonctions continues et strictement croissante) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $f(\mathbb{R})$. Puisque $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$, on obtient que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{3\pi}{2}$ et f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Comme $\frac{5\pi}{4} \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, on peut affirmer que l'équation $f(x) = \frac{5\pi}{4}$ admet une et seule solution sur $\mathbb{R}$ et l'égalité

$$f(5) = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4},$$

issu de la question 1.c) nous montre que 5 est solution de cette équation. Ainsi l'équation $f(x) = \frac{5\pi}{4}$ admet comme unique solution $x = 5$

Correction de l'exercice 1.2 : On pose $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

Domaine de définition : Pour que $f(x)$ soit défini, il faut et il suffit que $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]$ et $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$. En se rappelant que $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \Leftrightarrow \alpha \leqslant \beta$ et $\beta \leqslant \gamma$, ses deux conditions se traduisent par

$$\begin{cases} -1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \end{cases} \underset{1+x^2 \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -(1+x^2) \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2 \\ -(1+x^2) \leqslant 2x \leqslant 1 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(1+x^2) \leqslant 1 - x^2 \\ 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2 \\ -(1+x^2) \leqslant 2x \\ 2x \leqslant 1 + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x^2 \\ 0 \leqslant 1 + 2x + x^2 \\ 0 \leqslant 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x^2 \\ 0 \leqslant (1+x)^2 \\ 0 \leqslant (1-x)^2 \end{cases} \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

Par conséquent, on en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions continues dont le dénominteur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Puisque les fonctions $x \mapsto \arccos x$ et $x \mapsto \arcsin x$ sont continues sur $[-1,1]$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, les réels $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\dfrac{2x}{1+x^2}$ appartiennent à $[-1,1]$, on peut affirmer, par le théorème de composition des fonctions continues puis par le théorème de continuité d'une somme, que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominteur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$). Puisque les fonctions $x \mapsto \arccos x$ et $x \mapsto \arcsin x$ sont dérivables sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, les réels $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\dfrac{2x}{1+x^2}$ appartiennent à $]-1,1[$ (résoudre $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \pm 1$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = \pm 1$), on peut affirmer, par le théorème de composition des fonctions dérivables puis par le théorème de dérivabilité d'une somme, que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$. En outre, on a pour tout réel non nul

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' (\arcsin)'\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' (\arccos)'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \\
&= -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} - 2\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\
&= -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-(2x)^2}}
\end{aligned}$$

En utilisant les identités remarquables pour les expressions sous les racines, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}, \quad f'(x) = -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{4x^2}} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

- premier cas : $\boxed{x < -1}$ donc $\sqrt{x^2} = -x$ et $1-x^2 < 0$, ce qui implique que $\sqrt{(1-x^2)^2} = x^2-1$, ce qui nous donne

$$\forall x \in]-\infty,-1[, \quad f'(x) = -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{-2x} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{x^2-1} = \frac{4}{1+x^2}$$

  Puisque la dérivée de $x \to \arctan x$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, on en déduit qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall x < -1, \quad f(x) = 4\arctan x + C_1.$$

  Les deux fonctions de cette égalité étant continues sur $]-\infty,-1]$, on peut prolonger cette égalité quand $x = -1$. Puisque $\arccos(-1) = \pi$ et $\arcsin 0 = 0$, on obtient

$$f(-1) = 4\arctan(-1) + C_1 \Leftrightarrow \pi = -\pi + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 2\pi,$$

  par conséquent nous avons

$$\forall x \in]-\infty,-1], \quad f(x) = 4\arctan x + 2\pi$$

- second cas : $\boxed{x \in]-1,0[}$ donc $\sqrt{x^2} = -x$ et $1-x^2 > 0$, ce qui implique que $\sqrt{(1-x^2)^2} = 1-x^2$, ce qui nous donne

$$\forall x \in]-1,0[, \quad f'(x) = -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{-2x} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{1-x^2} = 0$$

  La fonction f est donc constante sur $]-1,0[$. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est constante sur $[-1,0]$ et que cette constante est $f(0) = \arcsin 1 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$, ce qui implique que

$$\forall x \in [-1,0], \quad f(x) = \pi$$

- troisième cas : $\boxed{x \in]0,1[}$ donc $\sqrt{x^2} = x$ et $1-x^2 > 0$, ce qui implique que $\sqrt{(1-x^2)^2} = 1-x^2$, ce qui nous donne

$$\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{2x} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{(1-x^2)} = -\frac{4}{1+x^2}$$

Puisque la dérivée de $x \to \arctan x$ est $\dfrac{1}{1+x^2}$, on en déduit qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = -4\arctan x + C_2.$$

Les deux fonctions de cette égalité étant continues sur $[0,1]$, on peut prolonger cette égalité quand $x=0$. Puisque $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$f(0) = 4\arctan(0) + C_1 \Leftrightarrow \pi = 0 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \pi,$$

Par conséquent nous avons

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = -4\arctan x + \pi$$

- quatrième cas : $\boxed{x > 1}$ donc $\sqrt{x^2} = x$ et $1 - x^2 < 0$, ce qui implique que $\sqrt{(1-x^2)^2} = -(1-x^2)$, ce qui nous donne

$$\forall x \in]1+\infty[, \quad f'(x) = -\frac{4x}{1+x^2} \times \frac{1}{2x} + 2\frac{x^2-1}{1+x^2} \times \frac{1}{x^2-1} = 0$$

La fonction f est donc constante sur $]1,+\infty[$. Puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'elle est constante sur $[1,+\infty[$ et que cette constante est $f(1) = \arcsin 0 + \arccos 1 = 0 + 0 = 0$, ce qui implique que

$$\forall x \in [1,+\infty], \quad f(x) = 0$$

En conclusion, la fonction f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 4\arctan x + 2\pi & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ \pi & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -4\arctan x + \pi & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

(on peut vérifier directement que cette dernière fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ et qu'elle est non dérivable en -1, 0 et 1)

Correction de l'exercice 1.3 : Par définition, $a^b = \exp(b\ln a)$ si b est un réel quelconque et a un réel strictement positif. On en déduit que l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$ est équivalente à l'équation $\exp(\sqrt{x}\ln x) = \exp(x\ln(\sqrt{x}))$. Il est donc indispensable d'exiger que $x > 0$ (pour que $\sqrt{x}$ existe ainsi que $\ln x$). La fonction exponentielle étant bijective, on en déduit que

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} &= \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \exp(\sqrt{x}\ln x) = \exp(x\ln(\sqrt{x})) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) \underset{\text{car } x>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x}\ln x = \frac{x}{2}\ln x \\ &\Leftrightarrow (\ln x)(\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\ln x)(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} & \sqrt{x} = 0 \\ \text{ou} & \ln x = 0 \\ \text{ou} & \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} & x = 0 \\ \text{ou} & x = 1 \\ \text{ou} & x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque les solutions sont nécessairement strictement positives, on en déduit que $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow x \in \{1,4\}$

Correction de l'exercice 1.4 : Domaine de définition de f. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, il suffit d'exiger que la fraction $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ existe, ce qui est le cas ssi $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ puis que sous cette condition que la racine existe, ce qui est le cas car

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}, \quad -1 < \cos x \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} 1+\cos x > 0 \\ 1-\cos x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geqslant 0.$$

Par conséquent, on peut affirmer que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. La fonction f étant clairement 2π-périodique et paire donc on se ramène à étudier f sur $[0,\pi[$.

- La technique douce : on remarque qu'on dispose des formules trigonométriques

$$1+\cos x = 1 + \left[2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1\right] = 2\cos^2(\frac{x}{2}) \quad \text{et} \quad 1-\cos x = 1 - \left[2\cos^2(\frac{x}{2}) - 1\right] = 2(1-\cos^2(\frac{x}{2})) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$$

On en déduit que

$$\forall x \in [0,\pi[, \quad f(x) = \arctan\sqrt{\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}} = \arctan\sqrt{(\tan(\frac{x}{2}))^2}.$$

Puisque $\dfrac{x}{2} \in [0,\dfrac{\pi}{2}[$, le réel $\tan(\dfrac{x}{2})$ est positif donc

$$\forall x \in [0,\pi[, \quad f(x) = \arctan(\tan(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2}$$

(puisque $\forall t \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan t) = t$ et prendre $t = \dfrac{x}{2}$).

- La technique barbare : On justifie que f est dérivable sur $[0,\pi[$ (quotient, puis deux composées de fonctions dérivables, je laisse au lecteur cette vérification pénible). Sa dérivée est donnée par le sympathique calcul suivant :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)'(\arctan)'\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right) = \frac{\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)} \\ &= 2\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \times \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)+(1-\cos x)} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{2\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{2\sin x} \text{ (car } x\in[0,\pi[\text{ donc } \sin x>0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Par conséquent, $\forall x\in[0,\pi[,\ f'(x)=\frac{1}{2}$ donc $f(x)=\frac{x}{2}+C$ pour une constante convenable. En évaluant en $x=0$, on obtient que $C=0$ donc $\forall x\in[0,\pi[,\ f(x)=\frac{x}{2}$.

On sait que $\forall x\in[0,\pi[,\ f(x)=\frac{x}{2}$ donc, par parité,

$$\forall x\in]-\pi,0],\ f(x)=f(\underbrace{-x}_{\in[0,\pi[})=\frac{-x}{2}=\frac{|x|}{2}$$

On remarque alors que l'on peut condenser les deux écritures de f sur chacun des intervalles précédents par

$$\forall x\in]-\pi,\pi[,\quad f(x)=\frac{|x|}{2}.$$

On prolonge par 2π-périodicité cette expression, ce qui donne

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}\quad f(x)=f(x-2\pi q)=\frac{|x-2\pi q|}{2},$$

où q est l'unique entier tel que $x-2\pi q\in]-\pi,\pi[$ (je laisse le soin au lecteur de vérifer que $q=E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)$ en utilisant la caractérisation de la partie entière), c'est-à-dire

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}\quad f(x)=\frac{\left|x-2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{2}\right)\right|}{2}$$

Correction de l'exercice 1.5 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle) et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\times,\quad f'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}.$$

   Pour déterminer le signe de $(1-x)e^x-1$, on introduit la fonction $g(x)=(1-x)e^x-1$, qui est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est donnée par $\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=-xe^x$. En particulier, g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $g(0)=0$, on en déduit que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^\times,\quad g(x)<g(0)=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^\times,\quad (1-x)e^x-1<0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}_+^\times,\quad f'(x)<0$$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $f(\mathbb{R}_+^\times)$. La limite classique $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ montre que $\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1}=1$. Ensuite, puisque $e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$$

   (l'exponentielle impose sa limite en l'infini sur les polynômes). Par conséquent, $f(\mathbb{R}_+^\times)=]0,1[$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $]0,1[$.

2. $\mathcal{D}_g =]0,1[$. Nous savons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} < 0$$

donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce qui implique que $g = f^{-1}$ est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^\times) =]0,1[$. Par conséquent, g est dérivable sur tout son domaine de définition $]0,1[$.

Correction de l'exercice 1.6 : Puisque la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, l'équation

$$(E) : \arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

ne possède aucune valeur interdite. Ensuite, la tangente réalisant une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(\arctan(2x) + \arctan x) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\tan(\arctan(2x)) + \tan(\arctan x)}{1 - \tan(\arctan(2x)) \times \tan(\arctan x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2x+x}{1-(2x)x} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 - 2x^2 \\ x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 1.7 :

1. (a) Domaine de définition : Puisque pour tout réel x, on a

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0,$$

ce qui implique que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier, elle est continue).
La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de bijection montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Il est immédiat que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$, on est confronté à une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée :

$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x - \sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x - \sqrt{x^2+1}}.$$

Puisque $\lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = -\infty$, on en déduit que $\lim_{x \to \infty} \left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = 0^+$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
Par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

(b) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left(\exp(\ln(x + \sqrt{x^2+1})) - \exp(-\ln(x + \sqrt{x^2+1}))\right) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) - 1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) = x\left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) = x \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel x, on a également

$$\begin{aligned} f(\operatorname{sh}(x)) &= \ln\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right] = \ln\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{4} + 1}\right] \\ &= \ln\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4}}\right] = \ln\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

Puisque $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, on peut affirmer que $\sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ce qui nous donne

$$f(\operatorname{sh}(x)) = \ln\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \ln(e^x) = x$$

En conclusion, on a montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(\operatorname{sh}(x)) = x) \Leftrightarrow \operatorname{sh} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \text{ et } f \circ \operatorname{sh} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}},$$

ce qui signifie que f et sh sont bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont les bijections réciproques l'une de l'autre. Puisque arg sh est la fonction réciproque de sh, on peut écrire

$$\operatorname{arg\,sh} = f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg\,sh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

2. On introduit les fonctions auxiliaires $\varphi : x \mapsto e^x - (1 + x)$ et $\psi : x \mapsto e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2}e^x)$ et nous allons déterminer leurs signes respectifs sur $\mathbb{R}_+$. Ces deux fonctions sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

   - Etude de φ : On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(x) = e^x - 1$ d'où l'on en déduit son tableau de variations

x	0		$+\infty$
φ'		$+$	
φ	0	$\nearrow$	

   ce qui montre que la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc on a bien $\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x$.
   Quant à la fonction ψ, sa dérivée ψ' est égale à φ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction ψ est croissante

   - Etude ψ : sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi'(x) = (1 - x - \frac{x^2}{2})e^x - 1.$$

   Le signe de cette fonction n'étant pas connue, on dérive une nouvelle (ce qui est possible dans notre cas).

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi''(x) = -\frac{x(x+4)e^x}{2}.$$

   On en déduit le tableau de varitions de ψ' puis celui de ψ

x	0		$+\infty$
ψ''	0	$-$	
ψ'	0	$\searrow$	
ψ	0	$\searrow$	

   ce qui démontre que la fonction ψ est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0, \quad e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$.

Nous venons de démontrer que $\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$, ce qui nous donne

$$\forall x > 0, \quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant x + \frac{x^2}{2}e^x \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}e^x$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{x}{2}e^x\right) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Correction de l'exercice 1.8 :

1. (a) Pour que $f(x)$ existe il est nécessaire et suffisant que

$$\left\{\begin{array}{ll}\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0 & (\ln\ \text{existe})\\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} & (\tan\ \text{existe})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[0+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[\\ \forall q\in\mathbb{Z},\quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+\pi q\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z}\ \text{tel}\ k\pi\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \forall q\in\mathbb{Z},\quad x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi q\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists k\in\mathbb{Z}\ \text{tel que}\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x\notin\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[\\ x\notin\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$. Ensuite, la fonction f est 2π-périodique car l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$ est 2π-invariant par translation et pour tout $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$, on a

$$f(x+2\pi)=\ln\left(\tan\left(\frac{x+2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=\ln\left(\tan\left(\left[\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right]+\pi\right)\right)\underset{\text{périodicité de } t\mapsto\tan t}{=}\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=f(x)$$

Sur chaque intervalle $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$, la fonction f est strictement croissante (comme composée de fonctions strictement croissantes) et elle y est dérivable (comme composée de fonctions dérivables).
Remarque : une fonction croissante deux intervalles I_1 et I_2 n'est pas nécessairement croissante sur $I_1\cup I_2$ (par exemple, c'est le cas de la fonction $x\mapsto\tan x$).
La dérivée de f est donnée par

$$f'(x)=\frac{\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]'}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\dfrac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-1}{\cos(x)}$$

En particulier, la fonction f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $f([0,\frac{\pi}{2}[$. Puisque $f(0)=0$ et que $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}f(x)=+\infty$, on en déduit que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Puisque que l'on a

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \mathrm{th}(x)=\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)},\quad \forall x>0,\quad e^{\ln x}=x$$

on a Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{1}{2}\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\sin 2t=\cdots}{=} \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{\cos(x)} \\
\mathrm{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{1}{2}\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\cos 2t=\cdots}{=} -\frac{1}{2}\times\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\sin 2t=\cdots}{=} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\mathrm{th}(f(x)) &= \frac{\mathrm{sh}(f(x))}{\mathrm{ch}(f(x))} = \sin(x)
\end{aligned}$$

2. On introduit les deux fonctions $\varphi : x \mapsto \sin x - x$ et $\psi : x \mapsto \sin x - (x - \frac{x^3}{3})$. Elles sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \cos x - 1, \quad \psi'(x) = \cos x - 1 + x^2, \quad \psi"(x) = -\sin x + 2x, \quad \psi^{(3)}(x) = -\cos x + 2$$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \in [-1, 1]$ et $\sin x \in [-1, 1]$, on en déduit que φ et $\psi^{(3)}$ sont négatives sur $\mathbb{R}$, ce qui nous fournit les tableaux de variations suivants :

x	0		$-\infty$
φ'	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	

x	0		$+\infty$
$\psi^{(3)}$		$+$	
$\psi"$	0	$\nearrow$	
$\psi"$		$+$	
ψ'	0	$\nearrow$	
ψ'		$+$	
ψ	0	$\nearrow$	

On en déduit que φ est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0, \quad \sin x \leqslant x$, et ψ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x$. De cet encadrement, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad 1 - \frac{x^2}{3} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

et le fait que $\lim_{x\to 0^+}(1 - \frac{x^2}{3}) = 1 = \lim_{x\to 0^+} 1$ nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement qui nous donne $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.