1 Exercices

Exercice 1.1 Soient A et C deux points du plan dont les affixes complexes respectives sont a et c.

1. Déterminer, en fonction de a et c, les affixes des points B et D tels que $ABCD$ soit un carré
2. Déterminer l'équation (en complexe) du cercle circonscrit au carré $ABCD$ puis de celui inscrit dans le carré $ABCD$.

Exercice 1.2 Soit ABC un triangle, $A_1 = bar((B,2);(C,1))$, $B_1 = bar((C,2);(A,1))$ et $C_1 = bar((A,2);(B,1))$
On note

- A_2 le point d'intersection des droites (AA_1) et (BB_1),
- B_2 le point d'intersection des droites (BB_1) et (CC_1)
- C_2 le point d'intersection des droites (CC_1) et (AA_1)

1. Montrer que A_2 est le milieu de $[B, B_2]$
2. Comparer les surfaces des triangles ABC et $A_2B_2C_2$

Exercice 1.3 On considère les points $A(3,6)$ et $B(6,-1)$.

1. Déterminer les coordonnées de l'unique point C tel que le triangle ABC soit équilatéral. Quelle est l'aire du triangle ?
2. Déterminer l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 1.4 Soit $ABCD$ un rectangle d'un plan euclidien.
Déterminer l'ensemble L des points M du plan tels que les cercles circonscrits aux triangles MAB et MBC soient égaux.

Exercice 1.5 Soient A, B, C les sommets d'un triangle équilatéral de coté 1.
Déterminer l'ensemble des points M qui vérifient $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$.

Exercice 1.6 On considère un triangle ABC. On construit le triangle $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$ de la façon suivante :
$A^{(1)}$ est le milieu de $[AB]$, $B^{(1)}$ est le milieu de $[BC]$, $C^{(1)}$ est le milieu de $[CA]$.
A partir du triangle $A^{(1)}B^{(1)}C^{(1)}$, on construit le triangle $A^{(2)}B^{(2)}C^{(2)}$ de la façon suivante :
$A^{(2)}$ est le milieu de $[A^{(1)}B^{(1)}]$, $B^{(2)}$ est le milieu de $[B^{(1)}C^{(1)}]$, $C^{(2)}$ est le milieu de $[C^{(1)}A^{(1)}]$.
On itère indéfiniment ce processus.
Si le triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ est construit, on construit le triangle $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ de la façon suivante :
$A^{(n+1)}$ est le milieu de $[A^{(n)}B^{(n)}]$, $B^{(n+1)}$ est le milieu de $[B^{(n)}C^{(n)}]$, $C^{(n+1)}$ est le milieu de $[C^{(n)}A^{(n)}]$.

1. Construire un triangle ABC puis les triangles $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ pour $n = 1, 2, 3$ et 4.
   Que constate-t-on ? Que se passe-t-il si l'on poursuit indéfiniment le processus ?
2. Montrer que tous les triangles $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ ont le même centre de gravité.
3. Exprimer l'aire du triangle $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ en fonction de l'aire du triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$.
4. Conclusion.
5. Que se passe-t-il si l'on remplace un triangle par un polygone quelconque ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Dans un carré, les diagonales sont .... donc une rotation de centre le milieu de carré permet de passer de a à b
2. Pour chaque cercle, quel est le centre, quel est le rayon ?

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Un barycentre de barycentre est un barycentre
2. Prendre un repère, écrire les coordonnées de chaque point et utiliser que l'aire d'un triangle est la moitié du déterminant de deux des vecteurs engendrant le triangle

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. L'angle $\widehat{ABC}$ vaut, ce qui signifie en complexe que ...., ainsi z_C est connu à un réel près. Pour déterminer ce réel, utilisant que la longueur AB est la longueur AC (travailler en complexe). L'aire d'un triangle est la moitié du déterminant de deux des vecteurs engendrant le triangle
2. Cherchons son centre et son rayon

Indication pour l'exercice 1.4 : Le centre du cercle circonscrit à un triangle est ..... et son rayon est ....

Indication pour l'exercice 1.5 : Introduire le centre de gravité G du triangle, utiliser Chasles avec G pour chaque vecteur $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, utiliser que $MA^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2$ et développer $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|^2$

Indication pour l'exercice 1.6 :

1. On constate que le triangle rétrécit de plus en plus et qu'il tend vers un point.
2. On procède par récurrence en posant $\mathcal{P}_n$: " $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ a le même centre de gravité que ABC "
   Pour l'hérédité, utiliser qu'un barycentre de barycentres de points est un barycentre de ces mêmes points dont les pondérations sont ....
3. L'aire d'un triangle est la moitié du déterminant de deux des vecteurs engendrant le triangle et en utilisant les coordonnées, en déduire que l'aire de $A^{(n+1)}B^{(n+1)}C^{(n+1)}$ est la moitié de l'aire du triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$.
4. La suite des aires est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc elle tend vers 0. Ensuite, comme la longueur de chaque côté de $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ ne peut excéder la longueur (constante) du triangle initial ABC, cela implique les longueurs du triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ tendent vers 0 donc le triangle se tend vers un point. Or chaque triangle $A^{(n)}B^{(n)}C^{(n)}$ contient le même point.
5. Idem

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.4 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.5 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.6 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)