1 Exercices

Exercice 1.1 Pour n entier naturel, déterminer la classe de la fonction $f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} (1-x^2)^n & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$ (c'est-à-dire déterminer le plus entier k tel que f soit C^k sur $\mathbb{R}$).

Exercice 1.2

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x})$ si $x > 0$ et 0 sinon est C^∞ sur $\mathbb{R}$
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \exp(\frac{1}{(b-x)(x-a)})$ si $x \in]a,b[$ et 0 sinon est C^∞ sur $\mathbb{R}$

Exercice 1.3

1. Montrer que l'équation $x^n + 1 = nx$ admet une unique solution sur $[0,1]$
   On note x_n cette solution.
2. Justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
3. Donner $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^n$ et trouver un équivalent simple de x_n lorsque $n \to +\infty$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Utiliser pour commencer les théorèmes généraux d'addition, multiplication et composition de fonction C^∞ pour justifier que la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. La parité étant acquise, il reste à étudier ce qu'il se passe en 1.
Etudier la continuité en 1 (limite gauche et droite, en n'oubliant pas que $a^0 = 1$!!)
Si $n \geqslant 1$, appliquer le théorème de prolongement continu de la dérivée (attention $a^0 = 1$!!)
Si $n \geqslant 2$, expliciter $f'(x)$ et utiliser le théorème de prolongement continu de la dérivée
Itérer le processus (pour expliciter la dérivée $k^{\text{ème}}$ de $(1-x^2)^n$, utiliser Leibniz en remarquant que $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$
Au final, on doit obtenir que f est C^n et pas C^{n+1}.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Utiliser les théorèmes généraux sur les fonctions C^∞ pour justifier le caractère C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$.
   Montrer par récurrence que
   $$\text{" } f \text{ est } C^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f^n(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f^{(n)}(x) = 0 \text{ si } x \leqslant 0 \text{ "}$$
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{(b-x)(x-a)}$, en déduire que la fonction est le produit de deux translatés de la fonction précédentes.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Théorème de bijection sur $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.
2. Comparer $f_n(0)$, $f_n(x_n)$ et $f_n(\frac{1}{n})$. En déduire la comparaison entre 0, x_n et $\frac{1}{n}$ (faire un dessin le cas échéant)
3. Pour l'équivalent, écrire explicitement l'égalité $f_n(x_n) = 0$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)