1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soient $a<b$ et $x\in]a,b[$, montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(x)=f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}+\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

2. Soients $a_1<a_2<\cdots<a_n$ et $x\in]a_1,a_n[$, montrer qu'il existe $c\in]a_1,a_n[$ tel que

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\prod_{\substack{j\neq i\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right)+\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Exercice 1.2 Déterminer la classe de la fonction $f(x)=(x-3)\sqrt{3x-x^2}$ sur son domaine de définition (i.e. le plus grand entier k tel que f soit C^k)

Exercice 1.3 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(E):\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(xy)=f(x)f(y)$$

On suppose que f est dérivable en 1.

1. Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{\times}$
2. Quelle relation remarquable vérifie sa dérivée ?
3. Déterminer toutes les fonctions f satisfaisant à (E) et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

Exercice 1.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)= & \exp(\frac{x-1}{x^2}) \text{ si } x\neq 0\\ f(0)= & a\end{cases}$
f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a) ?

Exercice 1.5 Soit f une fonction définie sur un certain intervalle I contenant 0.
On suppose que f est continue et dérivable en 0 et que $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ pour tous $x,y\in I$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a,a[$ sur lequel $|f(x)|<\dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a,a[$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-a,a[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la fonction f recherchée. Pouvait-on l'intuiter ?

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Soient $a < b$ et $x \in]a, b[$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$
2. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $x \in]a_1, a_n[$, montrer qu'il existe $c \in]a_1, a_n[$ tel que
$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right) + \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Indication pour l'exercice 1.2 : Déterminer la classe de la fonction $f(x) = (x-3)\sqrt{3x-x^2}$ sur son domaine de définition (i.e. le plus grand entier k tel que f soit C^k)

Indication pour l'exercice 1.3 : On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$$(E) : \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$
On suppose que f est dérivable en 1.

1. Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{\times}$
2. Quelle relation remarquable vérifie sa dérivée ?
3. Déterminer toutes les fonctions f satisfaisant à (E) et de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$

Indication pour l'exercice 1.4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = & \exp(\dfrac{x-1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = & a \end{cases}$
f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a) ?

Indication pour l'exercice 1.5 : Soit f une fonction définie sur un certain intervalle I contenant 0.
On suppose que f est continue et dérivable en 0 et que $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ pour tous $x, y \in I$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a, a[$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-a, a[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la fonction f recherchée. Pouvait-on l'intuiter ?

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. Soient $a < b$ et $x \in]a, b[$, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a} + \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

2. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $x \in]a_1, a_n[$, montrer qu'il existe $c \in]a_1, a_n[$ tel que

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \frac{x-a_j}{a_i-a_j}\right) + \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Correction de l'exercice 1.2 : Déterminer la classe de la fonction $f(x) = (x-3)\sqrt{3x-x^2}$ sur son domaine de définition (i.e. le plus grand entier k tel que f soit C^k)

Correction de l'exercice 1.3 : On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$(E) : \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

On suppose que f est dérivable en 1.

1. Démontrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{\times}$
2. Quelle relation remarquable vérifie sa dérivée ?
3. Déterminer toutes les fonctions f satisfaisant à (E) et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$

Correction de l'exercice 1.4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = & \exp(\dfrac{x-1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = & a \end{cases}$

f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$ (on discutera selon les valeurs de a) ?

Correction de l'exercice 1.5 : Soit f une fonction définie sur un certain intervalle I contenant 0.
On suppose que f est continue et dérivable en 0 et que $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ pour tous $x, y \in I$

1. Calculer $f(0)$. Montrer qu'il existe un intervalle $]-a, a[$ sur lequel $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $]-a, a[$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-a, a[$ et calculer sa dérivée.
4. En déduire la fonction f recherchée. Pouvait-on l'intuiter ?