1 Exercices

Exercice 1.1 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f - i\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + i\,\mathrm{Id})$

Exercice 1.2 On considère l'application $\Delta_\lambda : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \rightarrow & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k + 1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Exercice 1.3 Soit $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ défini par :
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f(\varepsilon_i) = p\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j$$

1. Justifier que $f^2 - 3pf + 2p^2\,\mathrm{Id} = 0$
2. On considère les deux applications g et h définies respectivement par :
$$g = \frac{1}{p}(f - p\,\mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad h = \frac{1}{p}(2p\,\mathrm{Id} - f)$$
   (a) Montrer que g et h sont deux projecteurs.
   (b) Calculer $g + h$, $g \circ h$, $h \circ g$ et $pg + 2ph$
   (c) Calculer f^n en fonction de p, g, h et n.

Exercice 1.4 On considère une application linéaire telle que : $f^2 - 5f + 4\,\mathrm{Id} = 0$

1. Montrer que $p = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 4\,\mathrm{Id})$ sont des projecteurs.
2. Caractériser p et q puis calculer $p + q$.
3. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 f'' - 4xf' + 4f = 0$ où f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
On note F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que $\Delta : f \mapsto xf'$ est un endomorphisme de F et que Δ vérifie
$$\Delta^2 - 5\Delta + 4\,\mathrm{Id} = 0$$
   (c) Déterminer les images de p et q (les projecteurs associés à Δ)
   (d) En déduire la forme des solutions de (E).

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f - i\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + i\,\mathrm{Id})$

Indication pour l'exercice 1.2 : On considère l'application $\Delta_\lambda : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \to & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k + 1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Indication pour l'exercice 1.3 : Soit $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ défini par :
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f(\varepsilon_i) = p\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j$$

1. Justifier que $f^2 - 3pf + 2p^2\,\mathrm{Id} = 0$
2. On considère les deux applications g et h définies respectivement par :
$$g = \frac{1}{p}(f - p\,\mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad h = \frac{1}{p}(2p\,\mathrm{Id} - f)$$
   (a) Montrer que g et h sont deux projecteurs.
   (b) Calculer $g + h$, $g \circ h$, $h \circ g$ et $pg + 2ph$
   (c) Calculer f^n en fonction de p, g, h et n.

Indication pour l'exercice 1.4 : On considère une application linéaire telle que : $f^2 - 5f + 4\,\mathrm{Id} = 0$

1. Montrer que $p = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 4\,\mathrm{Id})$ sont des projecteurs.
2. Caractériser p et q puis calculer $p + q$.
3. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 f'' - 4xf' + 4f = 0$ où f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
   On note F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que $\Delta : f \mapsto xf'$ est un endomorphisme de F et que Δ vérifie
$$\Delta^2 - 5\Delta + 4\,\mathrm{Id} = 0$$
   (c) Déterminer les images de p et q (les projecteurs associés à Δ)
   (d) En déduire la forme des solutions de (E).

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f = 0$

1. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $E = \ker(f) \oplus \ker(f - i\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f + i\,\mathrm{Id})$

Correction de l'exercice 1.2 : On considère l'application $\Delta_\lambda : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \to & P(X+1) - \lambda P(X) \end{array}$

1. Montrer que $\Delta_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$
2. Pour quelles valeurs de λ s'agit-il d'un isomorphisme ?
3. Caractériser son image lorsque $\lambda = 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe un polynôme P_k tel que
$$\deg P_k = k+1 \qquad \text{et} \qquad P_k(X+1) - P_k(X) = X^k$$
5. En déduire que les sommes $S_k(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ dépendent polynômialement de n et expliciter $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$

Correction de l'exercice 1.3 : Soit $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^p$ défini par :
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f(\varepsilon_i) = p\varepsilon_i + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j$$

1. Justifier que $f^2 - 3pf + 2p^2\,\mathrm{Id} = 0$
2. On considère les deux applications g et h définies respectivement par :
$$g = \frac{1}{p}(f - p\,\mathrm{Id}) \qquad \text{et} \qquad h = \frac{1}{p}(2p\,\mathrm{Id} - f)$$
   (a) Montrer que g et h sont deux projecteurs.
   (b) Calculer $g + h$, $g \circ h$, $h \circ g$ et $pg + 2ph$
   (c) Calculer f^n en fonction de p, g, h et n.

Correction de l'exercice 1.4 : On considère une application linéaire telle que : $f^2 - 5f + 4\,\mathrm{Id} = 0$

1. Montrer que $p = \frac{1}{3}(f - \mathrm{Id})$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 4\,\mathrm{Id})$ sont des projecteurs.
2. Caractériser p et q puis calculer $p + q$.
3. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 f'' - 4xf' + 4f = 0$ où f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
On note F l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
   (a) Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que $\Delta : f \mapsto xf'$ est un endomorphisme de F et que Δ vérifie
$$\Delta^2 - 5\Delta + 4\,\mathrm{Id} = 0$$
   (c) Déterminer les images de p et q (les projecteurs associés à Δ)
   (d) En déduire la forme des solutions de (E).