1 Exercices

Exercice 1.1 Monotonie des suites $b'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{n}$

Exercice 1.2 On considère la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 1}$ et $u_0 = 1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \frac{1}{3}$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{6}$.
3. On considère la suite a définie par $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{6}$ et $a_0 = 1$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant a_n$.
   (b) Calculer a_n. En déduire que u_n converge et donner sa limite.

Exercice 1.3 Monotonie des suites $c'_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ et $c_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) - n \ln n$

Exercice 1.4 Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n > 0$
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n^2 \geqslant 2n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n^2 \leqslant 2n + u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$
4. En admettant que $\frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers 1, montrer que la suite $\frac{u_n}{\sqrt{2n}}$ tend vers 1.

Exercice 1.5 Etudier la monotonie des suites $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \times n!}$

Exercice 1.6 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1 + 5u_n}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.
3. Donner la limite de la suite u.

2 Indications

Indisponible actuellement (mais cela va venir)

3 Corrections

Indisponible actuellement (mais cela va venir)