1 Exercices

Exercice 1.1 1. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
3. Calculer pour tout réel x les expressions $\operatorname{sh}(f(x))$ et $f(\operatorname{sh} x)$. Qu'en déduit-on ?
4. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x$. Retrouver $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x}$

Exercice 1.2 1. Déterminer le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.

2. Justifier que la fonction f, réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle I à expliciter.
3. Soit g sa réciproque.
   (a) Donner son domaine de définition
   (b) Sur quel intervalle est-elle dérivable ?

Exercice 1.3 1. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

   (a) Etudier f et justifier que f réalise une bijection de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ sur un intervalle à expliciter.
   (b) Pour $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, calculer $\operatorname{ch}(f(x))$, $\operatorname{sh}(f(x))$ et $\operatorname{th}(f(x))$

2. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \sin x \leqslant x$. Retrouver $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. (a) Le calcul soigneux de la dérivée combiné aux simplifications algébriques indispensables fournit directement le résultat.
   (b) Pour les deux premières expressions, utiliser la définition de sh et appliquer les simplifications de calculs nécessaires. Voir, dans cours sur les bijections, ce que l'on peut dire de deux fonctions f et g telles que $f(g(x)) = x$ et $g(f(x)) = x$ (sur des domaines convenables)
2. Un encadrement $a \leqslant b \leqslant c$ signifie $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Pour chaque inégalité, introduire une fonction convenable et dresser son tableau de variations en plaçant les bornes. Ensuite encadrer $\dfrac{e^x - 1}{x}$ et utiliser le théorème d'encadrement.

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Ecrire la dérivée sous la forme $\dfrac{g(x)}{(....)^2}$. Pour étudier le signe de g, dresser le tableau de variations de g et placer les bornes.
2. Revoir la définition de la réciproque d'une bijection puis utiliser le théorème de dérivabilité de la réciproque.

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. (a) Pour le domaine de définition : $\ln(A)$ existe si A est ..., puis $\tan B$ appartient à ...., ce qui implique que $x \in ....$. Vérifier que f est 2π-périodique. Quant à la dérivée, utiliser soigneusement les formules de dérivation.
   (b) Que dire d'autre que de revoir les définitions des fonctions trigonométriques hyperboliques avec un soupçon de calcul.
2. Un encadrement $a \leqslant b \leqslant c$ signifie $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$. Pour chaque inégalité, introduire une fonction convenable et dresser son tableau de variations en plaçant les bornes. Si le signe d'une dérivée n'est pas évident, calculer la dérivée seconde pour en déduire le tableau de variations de la dérivée (bornes incluses). Ensuite encadrer $\dfrac{\sin x}{x}$ et utiliser le théorème d'encadrement.

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 :

1. (a) Domaine de définition : Puisque pour tout réel x, on a

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0,$$

ce qui implique que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (en particulier, elle est continue).
La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \times \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de bijection montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Il est immédiat que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En $-\infty$, on est confronté à une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée :

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1}) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

(b) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left(\exp(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) - \exp(-\ln(x+\sqrt{x^2+1}))\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = x\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = x\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout réel x, on a également

$$\begin{aligned}f(\operatorname{sh}(x)) &= \ln\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1}\right] = \ln\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}-2-e^{-2x}}{4}+1}\right] \\ &= \ln\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}}\right] = \ln\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$, on peut affirmer que $\sqrt{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, ce qui nous donne

$$f(\operatorname{sh}(x)) = \ln\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2}\right] = \ln(e^x) = x$$

En conclusion, on a montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad f(\operatorname{sh}(x)) = x) \Leftrightarrow \operatorname{sh}\circ f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}} \text{ et } f\circ\operatorname{sh} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}},$$

ce qui signifie que f et sh sont bijectives de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elles sont les bijections réciproques l'une de l'autre.
Puisque arg sh est la fonction réciproque de sh, on peut écrire

$$\operatorname{arg\,sh} = f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg\,sh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

2. On introduit les fonctions auxiliaires $\varphi : x \mapsto e^x - (1+x)$ et $\psi : x \mapsto e^x - (1+x+\frac{x^2}{2}e^x)$ et nous allons déterminer leurs signes respectifs sur $\mathbb{R}_+$. Ces deux fonctions sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

   - Etude de φ : On a $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(x) = e^x - 1$ d'où l'on en déduit son tableau de variations

x	0		$+\infty$
φ'		$+$	
φ	0	$\nearrow$	

   ce qui montre que la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc on a bien $\forall x \geqslant 0, \quad 1+x \leqslant e^x$.
   Quant à la fonction ψ, sa dérivée ψ' est égale à φ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction ψ est croissante

   - Etude ψ : sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi'(x) = (1 - x - \frac{x^2}{2})e^x - 1.$$

   Le signe de cette fonction n'étant pas connue, on dérive une nouvelle (ce qui est possible dans notre cas).

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi"(x) = -\frac{x(x+4)e^x}{2}.$$

   On en déduit le tableau de varitions de ψ' puis celui de ψ

x	0		$+\infty$
$\psi"$	0	$-$	
ψ'	0	$\searrow$	
ψ	0	$\searrow$	

   ce qui démontre que la fonction ψ est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geqslant 0, \quad e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x$.

Nous venons de démontrer que $\forall x \geqslant 0, \quad 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}e^x$, ce qui nous donne

$$\forall x > 0, \quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant x + \frac{x^2}{2}e^x \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}e^x$$

Puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{x}{2}e^x\right) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$, le théorème des gendarmes montre que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Correction de l'exercice 1.2 :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme quotient de fonctions dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle) et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2}.$$

   Pour déterminer le signe de $(1-x)e^x - 1$, on introduit la fonction $g(x) = (1-x)e^x - 1$, qui est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -xe^x$. En particulier, g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $g(0) = 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad (1-x)e^x - 1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f'(x) < 0$$

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $f(\mathbb{R}_+^\times)$. La limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ montre que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1} = 1$. Ensuite, puisque $e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

   (l'exponentielle impose sa limite en l'infini sur les polynômes). Par conséquent, $f(\mathbb{R}_+^\times) =]0,1[$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur $]0,1[$.

2. $\mathcal{D}_g =]0,1[$. Nous savons que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} < 0$$

donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce qui implique que $g = f^{-1}$ est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^\times) =]0,1[$. Par conséquent, g est dérivable sur tout son domaine de définition $]0,1[$.

Correction de l'exercice 1.3 :

1. (a) Pour que $f(x)$ existe il est nécessaire et suffisant que

$$\left\{\begin{array}{ll} \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0 & (\ln \text{ existe}) \\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \notin \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} & (\tan \text{ existe}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [0+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[\\ \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}+\pi q \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel } k\pi \leqslant \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+k\pi \\ \forall q \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}+2\pi q \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x \notin \frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[\\ x \notin \frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$. Ensuite, la fonction f est 2π-périodique car l'ensemble $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$ est 2π-invariant par translation et pour tout $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$, on a

$$f(x+2\pi) = \ln\left(\tan\left(\frac{x+2\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \ln\left(\tan\left(\left[\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right]+\pi\right)\right) \underset{\text{périodicité de } t\mapsto \tan t}{=} \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = f(x)$$

Sur chaque intervalle $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$, la fonction f est strictement croissante (comme composée de fonctions strictement croissantes) et elle y est dérivable (comme composée de fonctions dérivables).
Remarque : une fonction croissante deux intervalles I_1 et I_2 n'est pas nécessairement croissante sur $I_1 \cup I_2$ (par exemple, c'est le cas de la fonction $x \mapsto \tan x$).
La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]'}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{\cos(x)}$$

En particulier, la fonction f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement croissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $f([0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $f(0) = 0$ et que $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$, on en déduit que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Puisque que l'on a

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}, \quad \forall x > 0, \quad e^{\ln x} = x$$

on a Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{1}{2}\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\sin 2t=\cdots}{=} \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{\cos(x)} \\
\mathrm{sh}(f(x)) &= \frac{1}{2}\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right] = \frac{1}{2}\frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2}.\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\cos 2t=\cdots}{=} -\frac{1}{2}\times\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \underset{\sin 2t=\cdots}{=} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\mathrm{th}(f(x)) &= \frac{\mathrm{sh}(f(x))}{\mathrm{ch}(f(x))} = \sin(x)
\end{aligned}$$

2. On introduit les deux fonctions $\varphi : x \mapsto \sin x - x$ et $\psi : x \mapsto \sin x - (x - \frac{x^3}{3})$. Elles sont clairement dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = \cos x - 1, \quad \psi'(x) = \cos x - 1 + x^2, \quad \psi''(x) = -\sin x + 2x, \quad \psi^{(3)}(x) = -\cos x + 2$$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x \in [-1, 1]$ et $\sin x \in [-1, 1]$, on en déduit que φ et $\psi^{(3)}$ sont négatives sur $\mathbb{R}$, ce qui nous fournit les tableaux de variations suivants :

x	0		$-\infty$
φ'	0	$-$	
φ	0	$\searrow$	

x	0		$+\infty$
$\psi^{(3)}$		$+$	
ψ''	0	$\nearrow$	
ψ''		$+$	
ψ'	0	$\nearrow$	
ψ'		$+$	
ψ	0	$\nearrow$	

On en déduit que φ est négative sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0, \quad \sin x \leqslant x$, et ψ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^3}{3} \leqslant \sin x$. De cet encadrement, on en déduit que

$$\forall x > 0, \quad 1 - \frac{x^2}{3} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

et le fait que $\lim_{x\to 0^+}(1 - \frac{x^2}{3}) = 1 = \lim_{x\to 0^+} 1$ nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement qui nous donne $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$.