1 Exercices

Exercice 1.1 Soit x un réel positif et on considère les suites $(u_n)_n$ et (S_n) définies respectivement par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = (1 + \frac{x}{n})^n \quad \forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et expliciter sa limite.
2. Comparer les réels $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ et $\dfrac{1}{k!}$. Comparer alors les réels u_n et S_n.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_n \leqslant e^x$.
4. En déduire la convergence de la suite (S_n) ainsi que sa limite.
5. On suppose ici que $x < 0$.
   Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Conclusion.

Exercice 1.2 On considère la suite $(T_n)_n$ définie par $\forall n \geqslant 0, \quad T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$.

1. Montrer que la suite est majorée et croissante en déduire sa convergence.
   On souhaite désormais expliciter $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$
2. Montrer que
   $$\forall x \geqslant 1, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$
   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

Exercice 1.3

1. Montrer que les suites $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n)$ et $K_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ sont adjacentes.
2. Calculer $H_{2n} - H_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

2 Indications

Indication pour l'exercice 1.1 :

1. Utiliser $\ln u_n$ et l'équivalent de $\ln(1+x)$ en 0
2. $\dfrac{\frac{\binom{n}{k}}{n^k}}{\frac{1}{k!}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{n-k+1}{n}$.
   Pour la seconde question, si $a_k \leqslant b_k$ alors $\sum\limits_k a_k \leqslant \sum\limits_k b_k$ (si on regarde bien u_n est aussi une somme)
3. Procéder par récurrence en introduisant la fonction $T_n(x) = S_n - e^x$. Pour l'hérédité, étudier les variations de T_{n+1} (sa dérivée est T_n) puis évaluer cette fonction en 0
4. Théorème d'encadrement
5. Etudier le signe de $S_{2n+2} - S_{2n}$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1}$ (on obtiendra dans chacun des deux termes résiduels et on factorisera au mieux)
   Pour la dernière question, revoir le cours sur les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Indication pour l'exercice 1.2 :

1. Effectuer le changement de variable $j = k+1$ dans T_{n+1} pour en déduire l'expression simplifiée de $T_{n+1} - T_n$ (il doit rester trois termes)
   Pour la majoration, remarquer que $a_1 + a_2 + \cdots + a_N \leqslant N \max\limits_k a_k$
2. Etudier les variations des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - (\ln(x+1) - \ln x)$ et $x \mapsto (\ln(x+1) - \ln x) - \dfrac{1}{x}$ puis placer les limites aux bornes.
   En remplaçant x par k et en sommant, on obtient la limite

Indication pour l'exercice 1.3 :

1. Pour obtenir la montonie de H et K, étudier le signe des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$ et $x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x}$ en étudiant leurs variations (en n'oubliant pas de préciser les limites aux borne)
2. RAS

3 Corrections

Correction de l'exercice 1.1 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.2 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)

Correction de l'exercice 1.3 : Indisponible actuellement (mais cela va venir)